# NOTICE

SUR

# LES TRAVAUX SCIENTIFIQUES

## DE M. J. BOUSSINESQ.



LILLE,
IMPRIMERIE L. DANEL

Avril 1880 et Janvier 1883.

# NOTICE

SUR LES

# TRAVAUX SCIENTIFIQUES DE M. J. BOUSSINESQ,

Professeur à la Faculté des Sciences de Lille, lauréat de l'Institut [1].

Les mémoires analysés seront répartis en neuf groupes, sous les titres suivants :

I. — HYDRODYNAMIQUE (Voir p. 1 à 27);
II. — THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ DES SOLIDES (Voir p. 27 à 42);
III. — MÉCANIQUE DES CORPS SEMI-FLUIDES (Voir p. 42 à 50);
IV. — THÉORIE DES PHÉNOMÈNES ONDULATOIRES, ET OPTIQUE (Voir p. 50 à 62);
V. — MÉCANIQUE GÉNÉRALE ET THERMODYNAMIQUE (Voir p. 62 à 69);
VI. — THÉORIE ANALYTIQUE DE LA CHALEUR, ET PHYSIQUE (Voir p. 70 à 73);
VII. — ANALYSE ET GÉOMÉTRIE (Voir p. 73 à 79);
VIII. — PHILOSOPHIE DES SCIENCES (Voir p. 79 à 84);
IX. — SUPPLÉMENT, contenant les travaux postérieurs à la première édition de cette Notice, c'est-à-dire au 12 avril 1880 (Voir p. 85 à 100).

## I. — HYDRODYNAMIQUE.

### 1. — *Théorie des phénomènes constatés par les expériences de M. Poiseuille.*

(Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, 1er juillet 1867; t. LXV, p. 46.)

(1) L'Académie des Sciences lui a decerné, en 1872, le Prix Poncelet pour l'année 1871.

2. — *Mémoire sur l'influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluides.*

(Comptes-Rendus, 27 juillet 1868, t. LXVII, p. 219, et Journal de Mathématiques pures et appliquées; t. XIII, 1868, p. 377 à 424. L'insertion de ce mémoire au Recueil des Savants étrangers a été votée, le 3 août 1868, par l'Académie des Sciences, sur un rapport approbatif qui se trouve aux Comptes-Rendus, t. LXVII, p. 287. — Voir aussi, touchant les mêmes questions : 1° l'Essai sur la théorie des eaux courantes (du 28 octobre 1872), au t. XXIII du Recueil des Savants étrangers, notes des pages 1 à 5, 252 à 260, 359, 634 à 638; 2° les Additions à cet essai, p. 1 à 6 et 41 à 45, au tome XXIV du même recueil ; 3° les §§ I et IV du Complément au même essai, dans le Journal de Mathématiques, de 1878, p. 335 à 346 et 370 à 374.)

3. — *Essai théorique sur la loi de M. Graham relative à la diffusion des gaz.*

(Comptes-Rendus, 3 août 1868, t. LXVII, p. 319, et Additions déjà citées à l'Essai sur la théorie des eaux courantes, note des p. 6 à 8.)

Ces mémoires ou articles ont pour objet l'étude des écoulements fluides, soit le long des tubes fins, soit à travers des milieux poreux, tels que les sables, lorsque ces mouvements se font, ou assez lentement, ou contre des parois assez polies, pour que la vitesse varie graduellement d'un point aux points voisins et d'un instant aux suivants. Il s'agit donc de cas où il ne se produit pas, du moins en quantité influente, de ces brusques tourbillonnements, inévitables dans les écoulements à travers de grandes sections, qui rendent les glissements et les frottements mutuels des couches fluides énormément différents de ce qu'ils seraient si le mouvement vrai de chaque particule se réduisait à la translation générale ou moyenne de cette particule.

Le principe fondamental de l'hydrodynamique consiste à admettre que tout élément de volume d'un fluide, dès que ses déformations d'ensemble cessent de se produire ou dès que son mouvement visible s'arrête, reprend très vite la constitution symétrique interne qui y annule les *frottements intérieurs*, c'est-à-dire les *composantes tangentielles* des pressions. Ces composantes dépendent donc, à chaque instant, de l'état dynamique *actuel* de l'élément fluide, ou, en d'autres termes, des vitesses relatives des molécules qui le composent, mais non des états dynamiques *antérieurs*, dont les effets, aussi antérieurs, se sont effacés successivement et même presque instantanément. Comme les vitesses relatives, dans les mouvements considérés ici, sont fort petites entre particules contiguës, il est naturel de supposer que les frottements leur sont proportionnels. M. Boussinesq déduit de ce principe, et de l'isotropie évidente

du fluide, c'est-à-dire de la parité de sa constitution dans tous les sens dès qu'on le suppose à l'état de repos, les formules des frottements intérieurs bien connues depuis Navier, et démontrées de diverses manières dans les cours de mécanique appliquée. Mais, de plus que Navier, il observe que le frottement, pour même vitesse relative, ou du moins pour des vitesses relatives comparables, a autant d'intensité près d'une paroi mouillée, entre la *gaîne* fluide immobilisée par l'adhésion à la paroi et une couche contiguë intérieure, qu'entre deux couches fluides quelconques; vu que cette force n'est due, dans les deux cas, qu'à des glissements pareils de couches sensiblement analogues. En d'autres termes, tandis que Navier supposait la vitesse, près des parois, brusquement variable de la valeur zéro qu'elle a sur la couche immobilisée à une valeur finie du même ordre que la vitesse moyenne d'écoulement, M. Boussinesq montre qu'elle doit y varier graduellement comme à l'intérieur. En conséquence, il suppose nulle la vitesse contre la paroi mouillée, dans les mouvements fluides qui sont réguliers, ou non affectés de tourbillons.

Muni de ces équations, il en déduit les lois générales de l'écoulement, soit uniforme, soit même graduellement varié, c'est-à-dire se faisant par filets peu inclinés les uns sur les autres et très peu courbes. Le calcul prouve que, dans tous ces cas, la *pente motrice*, ou hauteur de charge dépensée par unité du chemin parcouru, égale le produit du coefficient $\varepsilon$ de frottement intérieur par l'inverse de l'aire de la section normale fluide, par la vitesse moyenne et par un certain nombre, qui est constant pour toutes les sections d'une même forme donnée. Ce nombre, ainsi que le mode de répartition des vitesses entre les divers filets fluides, s'obtiennent d'ailleurs, par l'intégration, pour une infinité de formes de la section, notammont pour toutes les sections elliptiques et rectangulaires, pour celles qui sont triangulaires équilatérales, etc. M. Émile Mathieu avait, du reste, trouvé avant l'auteur (*Comptes-Rendus*, 10 août 1863, t. LVII, p. 320) ce mode de répartition pour le plus simple des cas considérés, qui est celui du mouvement uniforme d'un liquide à travers des sections elliptiques. Mais M. Boussinesq, qui ignorait ces recherches de M. E. Mathieu, a, de plus, justifié théoriquement l'hypothèse d'une vitesse insensible contre les parois mouillées, et découvert, soit les lois générales du mouvement uniforme, convenant à toute espèce de section, soit le procédé d'intégration qui rend attaquable le problème des écoulements graduellement variés.

La relation établie entre la pente motrice, l'aire des sections, leur forme et la vitesse moyenne, donne d'abord, et immédiatement, les lois expérimen-

tales, bien connues, du docteur Poiseuille sur l'écoulement permanent de l'eau le long de tubes capillaires. Le débit, par unité de temps, y est en raison directe de la pente et du carré de l'aire des sections. M. Boussinesq obtient de plus les lois générales de l'état variable qui précède l'établissement de cet état permanent, en supposant du moins que les filets fluides y soient rectilignes et parallèles. D'après l'une de ces lois, le volume total de liquide qui, durant la période d'établissement du régime (et dans l'hypothèse que le fluide remplissant le tube ait été d'abord en repos), coule en moins que si l'état permanent avait existé dès le début, est proportionnel au produit de la pente motrice par le cube des sections.

L'auteur déduit des expériences de Poiseuille la valeur numérique, pour l'eau, du coefficient $\varepsilon$ des frottements intérieurs, et il reconnaît que cette valeur, d'ailleurs confirmée par certaines observations de Darcy sur des écoulements assez lents le long de tuyaux polis de quelques centimètres de diamètre, est sans comparaison plus faible que celles qui conviennent pour les écoulements tumultueux observés dans les canaux et les tuyaux d'un certain calibre. Il explique cette différence, si considérable, des frottements dans les deux cas, en remarquant que, bien avant qu'aient pu naître, à l'intérieur de ces canaux et tuyaux, les énormes vitesses qui s'y réaliseraient dans l'hypothèse de la continuité parfaite des mouvements, les ballottements inévitables à l'intérieur de grandes sections, se combinant avec l'effet de la translation générale du fluide pour produire des chocs obliques contre les parois, y font naître des tourbillonnements étendus et des frottements bien plus considérables ; d'où suit un régime tout différent de celui qui s'établit dans les mouvements appelés ici *réguliers* ou bien continus (voir, ci-après, les N^os^ 12, 13, 14, p. 16).

La même relation générale entre les pentes, les vitesses moyennes, la forme et l'aire des sections, régit aussi les mouvements lents des eaux d'infiltration du sol à travers les tubes irréguliers que forment les interstices des grains de sable composant les terrains perméables. L'auteur en déduit que, pour des couches de terrain d'un degré moyen donné de compacité et de finesse remplissant un tuyau ou un canal, la vitesse moyenne est simplement proportionnelle à la pente motrice. Dupuit avait déjà édifié, sur cette loi fondamentale, la théorie du régime permanent de ces eaux d'infiltration. Mais il restait à étudier leurs régimes non permanents : c'est ce qu'a fait M. Boussinesq. Il a reconnu, par exemple, que les crues ou gonflements des eaux souterraines, coulant sur un sous-sol imperméable,

se propagent en général avec une petite vitesse, sensiblement constante, proportionnelle à la pente du sous-sol, et que plusieurs gonflements, produits à la fois en divers points, ou successivement en un même endroit, se fondent peu à peu en un seul, d'après une loi qui est analogue à la manière dont s'effacent des inégalités de température existant initialement en différentes parties d'une longue barre.

Enfin, la même relation, propre aux écoulements bien continus et graduellement variés, entre la vitesse moyenne, la pente motrice en chaque point, etc., s'applique aux gaz, pour des variations étendues de la pression et de la densité. L'auteur, observant que ces corps se dilatent d'après la loi de Mariotte, ou conservent sensiblement la température ambiante, lorsqu'ils ne cessent pas d'être en contact avec des parois solides, en déduit les lois, découvertes par Graham, de leur *transpiration* le long des tubes de petit diamètre. Il explique aussi, en partant d'hypothèses naturelles et très simples, la diffusion des gaz observée par le même Graham, M. Exner, etc., consistant dans leur passage à travers un corps à pores imperceptibles.

Passant à des mouvements permanents plus compliqués que ceux qui se font par filets presque rectilignes, M. Boussinesq a étudié l'écoulement, supposé encore bien continu, d'un liquide dans un tube *à axe courbe*, en supposant que cet écoulement se soit réglé de manière à présenter les mêmes circonstances dans toutes les sections normales à l'axe, et en admettant d'ailleurs, pour rendre les intégrations possibles, que ces sections soient des rectangles ayant leur base (horizontale) parallèle au plan de l'axe et beaucoup plus petite ou beaucoup plus grande que leur hauteur (verticale). C'est la première fois, et jusqu'ici la seule, où l'analyse ait été appliquée à des questions de cet ordre. L'auteur trouve que, pour les sections d'une grande hauteur relative, les filets fluides sont sensiblement circulaires et conaxiques. Au contraire, pour les sections beaucoup plus larges que hautes, ce sont des sortes d'hélices irrégulières, disposées symétriquement, les unes, d'un côté du plan horizontal mené suivant l'axe circulaire du tube, les autres de l'autre côté. En effet, les particules fluides, voisines de ce plan moyen et animées des vitesses les plus grandes, sont jetées par la force centrifuge vers le bord extérieur ou concave, jusqu'à ce que, s'étant en même temps suffisamment écartées de ce même plan de l'axe et ayant perdu une certaine partie de leur vitesse, elles reviennent peu à peu vers le bord intérieur on convexe, en continuant d'ailleurs à s'éloigner du plan horizontal moyen pour ne s'en

rapprocher que tout près du bord convexe et recommencer un trajet pareil. M. Boussinesq a pu calculer, dans l'hypothèse de la parfaite continuité des vitesses, les circonstances qui se présentent aux divers points de l'intérieur des sections, le débit total de fluide, la perte de charge due à la courbure, etc.

4. — *Théorie de l'intumescence liquide appelée onde solitaire ou de translation, se propageant dans un canal rectangulaire.*

(Comptes-Rendus, 19 juin 1871, t. LXXII, p. 755.)

5. — *Théorie générale des mouvements qui sont propagés le long d'un canal rectangulaire horizontal, et dont l'amplitude est sensiblement la même de la surface au fond.*

(Comptes-Rendus, 24 juillet 1871, t. LXXIII, p. 256.)

6. — *Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, et dont l'amplitude est sensiblement pareille de la surface au fond.*

(Comptes-Rendus, 13 novembre 1871, t. LXXIII, p. 1210, et Journal de Mathématiques pures et appliquées, t. XVII, 1872, p. 55 à 107.)

7. — *Addition au mémoire précédent.*

(Journal de Mathématiques, t. XVIII, 1873, p. 47 à 52. — Voir aussi, d'une part, au t. XXIII du Recueil des Savants étrangers, les p. 280 à 315, 360 à 425 et 448 à 470 de l'*Essai sur la théorie des eaux courantes*; d'autre part, au tome suivant, XXIV, du même Recueil, les p. 36 à 40, 51 à 54 des Additions à cet essai, et, dans le Journal de Mathématiques, de 1878, t. IV, p 846 à 366, le § II d'un Complément au même essai.)

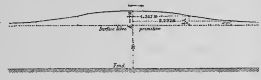
Ces diverses recherches concernent la classe la plus simple des mouvements que présentent les liquides pesants, contenus dans des bassins découverts à fond horizontal ou peu incliné. Le type en est fourni par le gonflement, ou *onde positive*, qui se forme à l'entrée d'un canal de grande longueur et à section rectangulaire contenant une eau en repos, quand on y fait tomber brusquement du dehors un volume modéré de liquide. A partir de l'entrée, ce gonflement, appelé *onde solitaire*, se propage indéfiniment le long du canal, en prenant bientôt une forme parfaitement déterminée, qui est celle d'un simple bourrelet allongé dont les deux moitiés d'avant et d'arrière sont symétriques l'une de l'autre, et qui persiste tant que les parties du canal envahies par l'onde sont de largeur et de profondeur

constantes, en ne s'abaissant, sous l'influence des frottements, qu'avec une grande lenteur ou après de longs trajets. La vitesse apparente de transport de ce bourrelet égale, à chaque instant, la vitesse effective qu'acquerrait, en chute libre, un corps tombant d'une hauteur égale à la demi-distance qu'il y a *du sommet de l'onde* au fond du canal. Mais la même classe de mouvements comprend bien d'autres phénomènes, d'apparence un peu moins régulière. Ce sont : 1° la propagation des *ondes négatives*, dépressions obtenues, à l'entrée du même canal, par un enlèvement brusque de liquide, c'est-à-dire par un abaissement et non plus un rehaussement du niveau; 2° la marche et la forme des têtes des *remous* indéfinis, positifs ou négatifs, gonflements ou dépressions que produit une introduction ou un enlèvement continus de liquide à l'entrée ; 3° la progression de tout système indéfini de vagues, très longues par rapport à la profondeur d'eau, pourvu que le mouvement qu'elles apportent à chaque molécule soit de sens alternativement contraires et peu ou point translatoire ; 4° les oscillations d'ensemble de la masse fluide contenue dans un bassin beaucoup plus étendu que profond (*seiches* des lacs); etc. Le *caractère* commun de tous ces phénomènes consiste en ce que la composante verticale des mouvements y est, à une première approximation, négligeable devant leur composante horizontale; circonstance d'où il résulte que la pression varie presque hydrostatiquement, aux divers points d'une même verticale, et que les accélérations dans les sens horizontaux, provenant principalement de la pente de la surface, sont presque les mêmes en ces points, ainsi, par suite, que les composantes horizontales de vitesses engendrées dans des temps assez courts pour ne pas donner trop de prise à l'influence des frottements du fond ou des bords.

On ne connaissait théoriquement, sur tous ces phénomènes, que la loi simple et de première approximation de Lagrange, d'après laquelle la vitesse de propagation, le long d'un canal, des ondes considérées, devait différer peu de la vitesse acquise en chute libre par un mobile tombant d'une hauteur égale à la demi-profondeur primitive du liquide. Lagrange avait même obtenu cette loi dans l'hypothèse d'une *profondeur infiniment petite*, sans dégager d'une manière nette le sens concret d'une telle expression. Divers efforts, tentés notamment par MM. Earnshaw et Stokes, pour expliquer l'onde solitaire, avaient entièrement échoué. Or, M. Boussinesq, après avoir fixé le véritable caractère, qu'on vient d'énoncer, des phénomènes dont il s'agit, a pu, non-seulement rendre compte de la formation et de la régularisation rapide de cette onde, donner sa vitesse exacte de

propagation et l'*équation de sa coupe longitudinale* (courbe dont l'ordonnée, abaissée sur son asymptote, est proportionnelle au produit des deux parties en lesquelles elle divise l'aire totale comprise entre cette asymptote et la courbe), ainsi que déterminer les trajectoires paraboliques (à axe vertical dirigé vers le bas) qu'y décrivent les molécules liquides;

Profil d'une onde solitaire dont la hauteur $h$ est le tiers de la profondeur primitive H de l'eau.




mais il a, de plus, retrouvé par la même analyse; déduite presque immédiatement et rationnellement des équations classiques de l'hydrodynamique, les détails les plus minutieux que présente la propagation bien moins simple des ondes négatives, des longues intumescences limitées, des remous indéfinis, etc. Il donne, par exemple, une explication complète de la formation de l'*onde initiale* ou tête d'un remous, observée par M. Bazin, sorte de saillie qui marche en avant des longues intumescences, et il a trouvé, par le calcul, à cette tête, une hauteur conforme à ce que les expériences ont appris. L'auteur montre également, sur l'exemple de longues ondes de petite courbure, comment, dans les canaux à section non-rectangulaire, les variations de la largeur à fleur d'eau influent sur les vitesses de propagation, etc. Après avoir évalué l'énergie d'un système quelconque d'ondes, c'est-à-dire le travail total qu'il faudrait dépenser pour les faire naître, et qui égale le produit du poids de l'unité de volume fluide par l'aire de la surface libre agitée et par la valeur moyenne du carré de sa dénivellation, il a pu aussi, sans introduire aucune nouvelle hypothèse, trouver de quelle manière elles se transforment le long d'un canal de largeur et de profondeur graduellement variables; comment, en particulier, la hauteur d'une onde solitaire et l'inverse de son volume croissent dans les parties rétrécies ou à fond exhaussé, diminuent au contraire dans les parties où la largeur et la profondeur vont en augmentant : ce qui explique les *mascarets*.

Enfin, admettant la continuité parfaite des mouvements, même au fond du canal, M. Boussinesq étudie encore l'influence des frottements sur ces ondes, influence qui, négligeable pendant un temps restreint ou sur les phénomènes de propagation produits entre deux sections peu distantes, n'en a pas moins pour effet de transformer et d'user à la longue le mouvement. Cette action des frottements, dans les ondes dont il s'agit, s'exerce surtout près des parois, là où il y a des glissements considérables entre les couches fluides comprises depuis celle qui est immobilisée par adhésion contre la paroi jusqu'à une autre peu distante, qui possède le mouvement même (ou complet) des molécules intérieures. La vitesse y varie, d'une couche à l'autre, comme font les températures aux divers points de l'épaisseur d'un mur dont une face est à température constante et l'autre à une température variable donnée. Il en résulte des pertes compliquées d'énergie, changeantes, d'une onde à l'autre, avec leur forme et leurs dimensions dont dépend la suite des vitesses produites à l'intérieur d'une section déterminée du canal. Toutefois, des lois simples, concernant l'extinction graduelle des vagues, se dégagent, quand il est question soit d'une onde solitaire, soit d'un système d'ondes périodiques avec mouvements sensiblement pendulaires; et ces dernières lois s'étendent aisément, tant aux oscillations de l'eau dans un siphon renversé, qu'aux ondes qui se propagent le long d'un tuyau en caoutchouc plein de liquide, ondes intéressantes, observées et utilisées par M. Marey, puis étudiées par M. Resal qui en a donné la théorie mathématique. Leur grosseur, et l'amplitude des mouvements longitudinaux qu'elles apportent, se réduisent à une fraction donnée de leurs valeurs initiales, après des trajets ou au bout de temps proportionnels à la racine carrée de la longueur d'onde. L'analyse de M. Boussinesq fournit tous ces résultats.

8. — *Théorie de la houle et du clapotis. — Sur l'action du frottement intérieur des fluides dans le phénomène des ondes.*

9. — *Evaluation de l'énergie employée à produire un ou plusieurs systèmes d'ondes liquides périodiques et du travail des résistances passives qui s'opposent au mouvement et finissent par ramener au repos toute la masse fluide.*

(Recueil des Savants étrangers de l'Academie des Sciences de Paris, t. XX, 1872, p. 564 à 584, et p. 604 à 615. — Voir aussi : 1° l'Essai sur la théorie des eaux courantes, p. 315 à 353 et 368 à 376, 2° les Additions à cet essai, p. 12 à 41 et 50 à 53; 3° les N$^{os}$ 9 à 13 du Complément au même essai, dans le Journal de Mathématiques de 1878, t. IV, p. 346 à 355.)

Les phénomènes étudiés dans ces mémoires se distinguent des précédents, *en ce que les composantes verticales des mouvements y sont comparables à leurs composantes horizontales*. Ils en diffèrent aussi, en ce qu'ils consistent tous en des déplacements *restreints* des particules fluides de part et d'autre de certaines situations moyennes fixes, ou en ce qu'ils ne comprennent aucune onde *de translation*, c'est-à-dire produisant un transport effectif de fluide, comme fait, par exemple, une onde limitée, positive ou négative. Les plus simples, dont se composent tous les autres, consistent, à une première approximation, en des oscillations rectilignes pendulaires et synchrones, de directions différentes ou même opposées pour les diverses molécules, produisant sur place des élévations et des abaissements alternatifs de la surface libre : ce sont des CLAPOTIS. La superposition de deux clapotis cylindriques égaux, mais dont l'un est en retard sur l'autre d'un quart d'oscillation complète et a ses nœuds en coïncidence avec les ventres de l'autre, donne naissance, comme M. Boussinesq l'a reconnu, à une HOULE, système d'*ondes courantes* où les molécules décrivent d'un mouvement continu des orbites elliptiques, dans des plans verticaux tous parallèles, et où la surface libre, de forme trochoïdale, progresse horizontalement dans le sens de ces plans avec une vitesse de propagation constante.

Laplace et Poisson avaient, depuis longtemps déjà, exprimé analytiquement les plus simples des clapotis, et Gerstner, MM. Kelland, Stokes, (auteurs dont M. Boussinesq ignorait les travaux lorsqu'il composa ses premiers mémoires sur les ondes) avaient aussi obtenu les lois les plus générales d'une houle simple : mais, à part Gerstner, qui s'est occupé seulement d'une houle à la surface d'une eau dont la profondeur puisse être supposée infinie, tous ces géomètres s'étaient bornés à une première approximation, c'est-à-dire avaient négligé les carrés et les produits des excursions (supposées purement périodiques) des molécules. M. Boussinesq a démontré de plus qu'eux cette loi, que pour une houle ou un clapotis simples, les trois composantes du déplacement moléculaire ou celles de la vitesse égalent, même à une deuxième approximation, les trois dérivées respectives d'un certain potentiel $\varphi$ par rapport à trois coordonnées prises pour variables indépendantes, pourvu que ces coordonnées soient, par exemple, celles de la situation moyenne des molécules, ou encore leurs coordonnées primitives de repos, mais non les coordonnées actuelles (comme l'avait supposé M. Stokes). Grâce à l'existence de ce potentiel, *il a pu donner une deuxième approximation* des lois d'une houle simple et d'un clapotis cylindrique, reconnaître, à ce degré d'approximation,

que, pour une longueur d'onde donnée, la durée de la période d'un clapotis ou la vitesse de propagation d'une houle ne dépendent pas de la hauteur des ondes; que, dans un clapotis formé au sein d'une eau assez profonde pour que les mouvements, au fond, restent insensibles, les trajectoires des molécules sont des arcs de parabole à axe vertical, légèrement concaves vers en haut; que la surface y prend à chaque instant la même forme trochoïdale que dans une houle de même longueur d'onde, etc.

Il prouve également que, dans toute houle (même quand les mouvements sont très sensibles au fond, cas non-considéré par Gerstner), la situation moyenne d'une molécule est, au-dessus de sa situation de repos, à une hauteur dont le produit par la longueur d'onde vaut l'aire de l'orbite que décrit la molécule, et il trouve aussi que cette aire, pour les molécules de la surface, égale le rapport de l'énergie d'une vague (par unité de largeur) au produit de la densité du fluide et du carré de la vitesse de propagation des vagues. Il démontre encore :

1° Que les lois de Gerstner, sur une houle assez courte pour que les mouvements au fond soient insensibles, s'étendent au cas d'un fluide composé de couches superposées inégalement denses et même compressibles, comme est l'atmosphère ;

2° Que, dans un liquide homogène, éprouvant une agitation décomposable en clapotis quelconques, la fonction des deux coordonnées horizontales qui exprime à un moment donné l'ordonnée verticale de la surface libre, et la dérivée, au même instant, de cette fonction par rapport au temps, suffisent pour définir ou déterminer la suite des états de la masse fluide entière, pourvu que toutes les parois limitant le liquide soient fixes et que la pression reste constante à la surface ;

3° Que, dans une houle assez haute, propagée au sein d'une eau d'une certaine profondeur, l'influence des frottements sur les formes des trajectoires, devenue sensible, consiste, d'une part, à rendre l'axe horizontal des orbites moins rapidement décroissant de la surface au fond et, d'autre part, à augmenter le rapport des axes verticaux de toutes ces orbites à leurs axes horizontaux, qui peuvent ainsi, près de la surface, cesser d'être les plus grands ;

4° Que, dans les cas ordinaires où les frottements n'ont guère pour effet que d'user à la longue les vagues sans modifier leurs lois, chaque houle ou clapotis décroît peu à peu comme s'il était seul, et d'autant plus vite que sa longueur d'onde est plus courte ;

5° Que, notamment, dans une eau profonde, des houles ou clapotis de même hauteur initiale et d'abord superposés deviennent insensibles au bout de temps proportionnels aux carrés de leurs longueurs d'onde, *en sorte que les plus longues vagues ne tardent guère à persister seules* ou à se dégager des autres. Elles s'en dégageraient moins vite dans une eau dont la profondeur ne serait qu'une petite fraction des longueurs d'onde, vu que des décroissements relatifs donnés se produiraient alors au bout de temps proportionnels à la racine carrée seulement de ces longueurs; etc.

M. Stokes, en 1851, s'était occupé déjà de l'extinction graduelle des houles propagées en eau profonde. Mais l'illustre correspondant de l'Académie des sciences a trouvé un coefficient d'extinction double du vrai, parce qu'il a négligé de compter dans l'énergie totale d'une houle son énergie potentielle, travail que produirait la pesanteur si le fluide des convexités venait à remplir les creux, et qui égale justement la demi-force vive, ou énergie actuelle, la seule que M. Stokes ait évaluée (1).

Enfin, M. Boussinesq a résolu rationnellement, de même que pour l'onde solitaire, l'intéressant problème de la transformation qu'éprouve une houle simple, de période donnée, quand elle se propage le long d'un canal dont la largeur et la profondeur varient. Il a, pour cela, appliqué le *principe du travail*, pendant un instant infiniment petit, à la masse fluide que comprennent, au commencement de cet instant, deux sections normales, séparées par un certain nombre entier d'ondes, et sur lesquelles le niveau fluide soit à fort peu près le niveau primitif d'équilibre. Mais, vu que ces sections doivent être supposées participer au mouvement apparent des ondes, il ajoute à la variation trouvée de l'énergie totale ce qui provient du fluide ainsi gagné ou perdu, d'un instant à l'autre, par la masse comprise entre les deux plans; et, en intégrant pour toute la durée d'une période, il obtient la différence d'énergie de deux vagues contiguës aux deux sections, ainsi, par suite, que les changements de hauteur et de forme éprouvés par l'une d'elles durant sa propagation jusqu'à la place qu'occupe l'autre. Quand on fait abstraction des frottements, cette énergie est constante pour chaque vague entière (et le produit de la surface de la vague par le carré de sa hauteur reste invariable) dans les cas, particulièrement intéressants, d'une houle à ondes ou très longues, ou assez courtes, et dans celui d'une profondeur constante. La même énergie

(1) *De l'effet du frottement intérieur des fluides sur le mouvement des pendules*, aux *Transactions philosophiques de Cambridge*, vol. 9, partie II, 1851; voir le § V du mémoire.

de chaque vague varie d'après une loi fort simple dans les autres cas. Mais l'extinction graduelle due aux frottements se calcule également sans grandes complications, quand on fait l'hypothèse, ici très admissible, de la continuité parfaite des vitesses d'un point aux points voisins, même près du fond et des bords.

M. Airy, dont le mémoire de 1845 sur les *Marées et vagues* a été traduit par M. Paul Guieysse dans le *Journal de Mathématiques* de 1875, avait déjà cherché comment se transforme une houle le long d'un canal de largeur et de profondeur variables. Mais il ne l'avait fait qu'au moyen d'une hypothèse, consistant à introduire certaines forces horizontales *fictives*, supposées appliquées du dehors aux diverses molécules fluides, et dont il dispose de manière à conserver aux expressions des déplacements les formes les plus simples. Aussi, quoiqu'il corrige autant que possible l'inexactitude de cette hypothèse en supposant nulle la valeur moyenne des forces fictives dans toute l'étendue de chaque section, ses résultats généraux, d'ailleurs fort compliqués, sont-ils tout différents de ceux que donne l'application pure et simple du principe des forces vives. Il n'y a accord que dans les deux cas particuliers d'une houle à très longues vagues et d'une profondeur constante, pour lesquels les forces fictives se trouvent, sur chaque section, ne pas différer (du moins sensiblement) de leur moyenne nulle.

### 10. — *Essai sur la théorie de l'écoulement d'un liquide par un orifice en mince paroi.*

(Comptes-rendus, 3 janvier, 31 janvier et 30 mai 1870, t. LXX, p. 33, 177 et 1279. — Voir aussi l'Essai sur la théorie des eaux courantes, p. 530 à 569, et les Additions à cet Essai, p. 60 et 61.)

L'hydrodynamique rationnelle n'avait donné jusqu'à ce jour, touchant l'écoulement des fluides par des orifices percés dans de minces parois planes, que la loi de Torricelli ou de Daniel Bernoulli, relative à la vitesse qui se produit, un peu en dehors de l'orifice, à travers la section dite *contractée*. Elle était restée absolument muette sur la grandeur du débit et sur les autres circonstances de l'écoulement. M. Boussinesq, observant que le frottement n'a dans ces phénomènes qu'une influence négligeable (puisqu'il n'y réduit pas sensiblement la vitesse), forme aisément leurs équations différentielles, tant pour l'intérieur du réservoir que pour les divers points de la veine, et, sans les intégrer, il peut en déduire un certain nombre de lois

importantes. Par exemple, quand les dimensions de la masse fluide contenue dans le réservoir sont notablement plus grandes que celles de l'orifice, les formes des filets fluides et de la veine, ainsi que le coefficient dit *de contraction* ou *de dépense*, deviennent indépendants tant de la charge que de la grandeur absolue de l'orifice. S'il s'agit, en particulier, de divers gaz qui s'écoulent dans le vide sans gain ni perte de chaleur, et dont les deux capacités calorifiques aient entre elles un même rapport constant, leurs vitesses d'écoulement sont indépendantes de la pression ou hauteur de charge et en raison inverse de la racine carrée de leurs densités spécifiques, etc.

Il démontre ensuite que, dans l'hypothèse d'un orifice dont les dimensions sont petites par rapport à celles de la masse fluide que contient le réservoir, il suffirait de connaître le débit effectif fourni par les diverses parties de l'orifice, pour en déduire toutes les vitesses produites dans le fluide intérieur au réservoir. Il prouve, en effet, que *la vitesse animant chaque particule de ce fluide intérieur est représentée, en grandeur et en direction, par l'attraction neutonienne qu'y exercerait, sur l'unité de masse, une couche fictive de matière, recouvrant tout l'orifice et répartie entre les diverses régions de ce dernier comme l'est le débit lui-même.* De cette loi, et du fait que la vitesse est partout finie, M. Boussinesq déduit que le débit par unité d'aire, en chaque point de l'orifice, est une fonction qui s'annule sur le contour de ce dernier. Des considérations plausibles lui montrent qu'elle s'annule également au centre de l'orifice, à cause des réactions centrifuges développées par les filets qui, venus des bords, se recourbent à la sortie. En joignant ces deux relations à celle qui exprime que la vitesse sur le contour de l'orifice égale, d'après le principe de D. Bernoulli, la racine carrée du produit de $2g$ par la hauteur de charge, il a trois conditions auxquelles doit satisfaire le mode de répartition du débit entre les divers éléments de l'orifice, et il lui suffit d'attribuer à ce mode de répartition les expressions analytiques les plus simples qui les vérifient, pour arriver, dans les deux cas principaux d'un orifice rectangulaire allongé et d'un orifice circulaire, à deux coefficients de contraction ou de débit, 0,628 et 0,657, bien d'accord avec celui 0,62, de l'expérience, vu que les frottements doivent les réduire un peu, surtout le second. L'auteur peut traiter encore des cas où l'orifice est multiple, d'autres où il est voisin de parois normales à son plan; etc.

11. — *Sur les tourbillons liquides à axe vertical.*

(Journal de Mathématiques, t. XVIII, 1873, p. 391 ; voir aussi l'Essai sur la théorie des eaux courantes, p. 618 à 639.)

Les mouvements tournants des fluides pesants, autour d'un axe de symétrie vertical, sont de deux sortes, suivant qu'ils accompagnent l'écoulement, sous d'assez petites charges, d'un fluide hors d'un réservoir, par un orifice percé dans sa partie inférieure, ou suivant qu'ils sont produits par deux courants opposés et voisins, imprimant des vitesses inverses à une masse fluide intermédiaire. Le frottement n'a qu'un rôle secondaire dans les premiers, où domine l'action de la pesanteur, tandis qu'il transmet seul le mouvement dans les seconds, dont le type est constitué par le cas d'un cylindre solide, creux et vertical, plongé daas un liquide, et animé autour de son axe d'un mouvement uniforme de rotation qui se communique peu à peu au fluide tant intérieur qu'extérieur.

Ces phénomènes ne sont encore abordables à l'analyse qu'aux endroits où les mouvements se réduisent presque à des rotations autour de l'axe de symétrie. M. Svanberg, de Stockholm, avait déjà reconnu que, dans les tourbillons de la première espèce, la vitesse, à l'état permanent, est en raison inverse de la distance à l'axe, conformément à une loi expérimentale découverte par Léonard de Vinci. M. De Saint-Venant, en rectifiant un calcul doublement inexact de Newton, avait trouvé que la même loi régit également ceux de la seconde espèce, parvenus aussi à l'état permanent, et pour ce qui concerne la masse fluide extérieure au cylindre moteur. M. Boussinesq a, de plus, déterminé la forme de la surface libre, sorte d'entonnoir, dont le demi-méridien est concave vers en bas et tel, que l'enfoncement éprouvé par chaque couche annulaire, au-dessous du niveau d'équilibre, égale la hauteur de chute correspondant à la vitesse effective de la couche. En outre, il démontre que, si le tourbillon pouvait se régler jusqu'à une distance infinie de l'axe, il possèderait une énergie potentielle finie, mais une énergie actuelle infinie, etc. Il donne enfin, au moins pour les cas les plus simples, les intégrales de l'état non-permanent qui se produit quand le tourbillon n'a pas le temps de se régler, etc.

12. — *Essai théorique sur les lois trouvées expérimentalement par MM. Darcy et Bazin, pour l'écoulement uniforme de l'eau dans les canaux.*

(Comptes-Rendus, 29 août 1870, t. LXXI, p. 389.)

13.— *Sur le mouvement permanent varié de l'eau dans les canaux découverts et dans les tuyaux de conduite.*

(Comptes-Rendus, 3 et 10 juillet 1871, t. LXXIII, p. 34 et 101.)

14. — *De l'influence des forces centrifuges sur l'écoulement de l'eau dans les canaux prismatiques de grande largeur.*

(Comptes-Rendus, 15 avril 1872, t. LXXIV, p. 1026. — Voir aussi l'Essai sur la théorie des eaux courantes, p. 24 à 162, 178 à 194 et 487 à 529.)

Ces trois mémoires ou notes ont été la préparation à celui de l'article 15 (*Essai sur la théorie des eaux courantes*), qui même, dans ses chapitres, les reproduit avec développements.

Les phénomènes d'écoulement que l'auteur y traite, sont en effet, les plus importants de l'hydraulique. Ils n'avaient présenté, jusqu'à la publication de ces études, qu'une *désespérante énigme*, suivant le mot du rapporteur éminent, à l'Académie, de l'*Essai sur la théorie des eaux courantes*, M. de Saint-Venant, bien d'accord en cela avec les savants expérimentateurs Darcy et M. Bazin. Ceux-ci, en effet, dans leurs *Recherches hydrauliques* publiées en 1865, avaient jugé que « l'obscurité de ces questions augmentait à mesure que des observations plus précises semblaient devoir y jeter plus de lumière ».

La difficulté, comme l'avait remarqué M. de Saint-Venant dès 1851, était surtout d'exprimer, dans une analyse où les géomètres n'avaient su introduire que des vitesses et des pressions variant d'une manière parfaitement régulière et continue de chaque point aux points très proches et de chaque instant aux suivants, l'influence dynamique prédominante des changements rapides et irréguliers qu'éprouvent la vitesse et les pressions aux divers points d'une grande masse fluide qui s'écoule. A cet effet, M. Boussinesq distingue d'abord deux parties dans la vitesse des molécules qui passent successivement par un point donné. La première, correspondant

à la translation générale de ces molécules, n'est autre chose que la *moyenne*, dite *locale*, des vitesses effectives qui se produisent à l'endroit considéré pendant un temps assez court : elle se trouve, des deux parties, la plus grande, mais celle qui a les dérivées les plus petites (vu qu'elle varie graduellement, tant d'un instant à l'autre que d'un point à l'autre), et elle est la seule qui intéresse l'hydraulicien, la seule qu'on puisse, jusqu'ici, introduire explicitement dans les formnles. Quant à la seconde partie, dont l'existence s'aperçoit à simple vue, mais dont la valeur moyenne, pendant un temps assez court, est nulle en chaque endroit, elle constitue l'*agitation* du fluide, c'est-à-dire un mouvement qui, s'il était seul, produirait partout de grandes déformations accidentelles, des glissements locaux de sens divers, sans translation générale dans aucune région. M. Boussinesq démontre que toutes les formules usuelles de l'hydrodynamique, et même celles de Navier qui tiennent compte des frottements intérieurs, s'appliquent quand on fait abstraction de cette dernière partie, ou quand on réduit les vitesses à leurs *moyennes locales*, pourvu qu'on attribue au coefficient des frottements intérieurs $\varepsilon$ (appelé bien à tort coefficient de viscosité) une valeur énormément supérieure à celle qui convient pour les mouvements tout-à-fait réguliers comme ceux qui ont lieu dans les tubes capillaires : et cette valeur bien plus grande de $\varepsilon$ *varie d'un point à l'autre*, au lieu d'être constante comme dans les équations de Navier ; car elle dépend, en chaque endroit, de *l'agitation* qui y règne.

D'ailleurs, l'agitation dont il s'agit provient des tourbillons que fait naître sans cesse, au contact et sous le choc des parois (surtout quand elles sont rugueuses), l'action combinée de la vitesse translatoire du fluide contigu et des mouvements de ballottement transversal rendus possibles par l'ampleur des sections. A partir des parois, l'agitation tourbillonnaire se propage vers l'intérieur, en y augmentant d'intensité quand elle se concentre, c'est-à-dire quand le contour de la section est concave, en restant au contraire sensiblement la même quand la section est limitée sur une grande étendue par un bord rectiligne ; etc. Le coefficient $\varepsilon$ croît donc, en définitive : 1° avec l'*ampleur* des sections, mesurée par la partie de leur aire qui correspond à l'unité de leur contour mouillé ; 2° avec la moyenne des vitesses produites à la paroi ; 3° avec le degré de concentration de l'agitation à partir du contour jusqu'au point considéré, degré égal à un dans une section rectangulaire large, à l'inverse du rapport des distances au centre dans une section circulaire, et généralement, pour toute forme des

sections, à nne certaine fonction des coordonnées transversales; 4° enfin, avec le nombre et la grandeur des rugosités des parois, sans que, toutefois, $\varepsilon$ cesse d'être sensible même quand les parois sont très polies. L'auteur, choisissant naturellement la forme la plus simple possible dans ces conditions, prend $\varepsilon$ proportionnel aux trois premiers des éléments énumérés, dont chacun le ferait s'annuler à fort peu près s'il décroissait jusqu'à zéro; et il le suppose en outre proportionnel à un coefficient, constant pour un certain degré de poli des parois, mais variable en sens inverse de ce degré. Des considérations analogues le conduisent à prendre, pour mesure du frottement extérieur exercé sur une paroi par le fluide contigu, le produit de la vitesse de celui-ci par le nombre des molécules qui passent devant la paroi durant l'unité de temps, nombre proportionnel à la vitesse même, et par un ooefficient dépendant, comme le précédent, de l'état de poli des parois, mais croissant encore plus vite que ce coefficient de frottement intérieur quand le degré de rugosité augmente.

Avec ces données, et en supposant d'ailleurs le frottement insensible sur les surfaces libres, le problème de l'écoulement n'est plus qu'une question de calcul intégral, parfaitement attaquable, non-seulement dans le cas d'un régime uniforme, mais même, par une méthode d'approximations successives due à l'auteur et où rien n'est laissé à l'arbitraire, quand le mouvement se trouve graduellement varié, c'est-à-dire quand les filets fluides, très peu courbes, font entre eux de petits angles, ou que la vitesse moyenne et l'aire de la section normale varient assez lentement, soit d'un endroit à l'autre, soit d'un instant à l'autre, en ayant leurs dérivées d'ordre supérieur encore moins sensibles. Les lois ainsi exprimées sont, pour le régime uniforme, simples, et d'accord, en oe qui concerne tant les débits que la répartition des vitesses aux divers points des sections, avec toutes les expériences précises que l'on possède sur les *grands* écoulements par les tuyaux et par les canaux découverts : la pente motrice, notamment, y est proportionnelle au carré de la vitesse moyenne, à l'inverse du rayon moyen (quotient de l'aire de la section par son contour mouillé) et à un coefficient dépendant du degré de poli des parois et aussi, dans une mesure restreinte, de la forme des sections, coefficient qui grandit lorsque les parois deviennent plus rugueuses ou que la forme des sections s'éloigne de celle du cercle. Quant aux lois du régime varié, permanent ou non-permanent, comme elles sont également dédnites, pour la premiere fois, d'une analyse toute rationnelle, il n'y est pas uniquement tenu compte des corrections qu'introduit, dans les termes

exprimant les inerties, l'inégalité de vitesse des filets fluides, comme Coriolis avait essayé de le faire pour le mouvement permanent; car un curieux artifice de calcul permet d'y exprimer aussi, et très simplement, les vitesses à la paroi en fonction de la vitesse moyenne, *même quand le mouvement est varié*, et d'obtenir par suite, dans la formule usuelle du frottement extérieur en fonction de la vitesse moyenne, la partie qui dépend de la *non-uniformité* du régime. Il en résulte, en particulier, une équation du mouvement permanent corrigée de deux erreurs entachant la formule usuelle due à Coriolis; erreurs qui, bien que de signe contraire, sont loin de se détruire, et ne se neutraliseraient que dans des mouvements bien continus avec vitesse nulle aux parois, etc.

Les mêmes procédés d'intégration s'appliquent aussi, quoique moins exactement, à des mouvements qui, sans être graduellement variés, à cause des petites courbures sensibles que les filets fluides y prennent, ressemblent cependant aux mouvements graduellement variés sous les autres rapports, c'est-à-dire en ce que ces filets fluides sont encore peu inclinés les uns par rapport aux autres et que les dérivées de la vitesse moyenne et de la section sont assez faibles. Les équations pour ces cas-là ont une forme simple quand on remplace les vitesses des divers filets par leur moyenne, dans les *petits termes* provenant de la variation du mouvement: et elles suffisent, dans la plupart des circonstances où la formule des mouvements graduellement variés serait en défaut; par exemple, aux endroits et aux instants où un régime graduellement varié commence à *s'établir* ou commence à *se détruire* rapidement dans un cours d'eau.

L'auteur applique ces diverses équations générales à un grand nombre de problèmes intéressants, dont plusieurs étaient réputés inabordables. Citons, pour ne parler que du mouvement permanent dans les canaux prismatiques, l'étude des circonstances qu'y présentent l'établissement et la destruction d'un régime uniforme ou, plus généralement, d'un régime graduellement varié, le calcul de la forme des ressauts, tantôt simples, tantôt ondulés, qui se produisent dans les cours d'eau torrentueux, aux endroits, situés un peu en amont des barrages, où la surface se relève et où la profondeur augmente rapidement, etc. Toutes ces circonstances sont confirmées par l'observation. Citons encore la mise en compte de frottements extérieurs considérables, dépendant de la non-uniformité du mouvement, dans l'évaluation des pertes de charge produites par un brusque épanouissement des filets fluides qui remplissent un tuyau ou que limite un lit découvert.

L'introduction de ces frottements, qui, dus en partie à des contre-courants dirigés d'aval en amont, tantôt aident et tantôt contrarient en somme l'écoulement général, conduit théoriquement au véritable coefficient de débit des ajutages cylindriques, 0,82, au lieu de 0,85 qu'on trouve d'ordinaire par l'application du principe de Borda.

15. — *Essai sur la théorie des eaux courantes.*

(Comptes-Rendus, 28 octobre 1872; t. LXXV, p. 1011, et Recueil des Savants étrangers de l'Académie des Sciences de Paris; t. XXIII, p. 1 à 680. — Le Rapport approbatif, par M. de Saint-Venant, est au Compte-Rendu du 14 avril 1879, t. LXXVI, p. 924 à 943.)

Ce travail étendu contient l'exposition de théories qui n'avaient pu être que résumées dans certains des articles et même des mémoires précédents; et l'auteur y ajoute l'étude de beaucoup d'autres questions, d'un haut intérêt au point de vue de l'hydraulicien.

Par exemple, pour ce qui concerne le mouvement permanent, M. Boussinesq détermine les circonstances de l'écoulement, en général non uniforme, qui se produit dans des canaux sensiblement prismatiques plus ou moins longs. A cet effet, il joint à la formule du mouvement graduellement varié et à celle du ressaut, qui, l'une ou l'autre, s'appliquent en tous les points de ces canaux, la loi, admise implicitement par tout le monde, que le régime y tend vers l'uniformité dès qu'on s'éloigne de chacune de leurs deux extrémités, c'est-à-dire, dès que s'atténue l'influence des conditions accidentelles accompagnant l'introduction et la sortie du liquide. Cette loi, qui permet de reconnaître si un régime graduellement varié est sous la dépendance des conditions *d'amont* ou de celles *d'aval* et, ensuite, de fixer l'emplacement des *ressauts* où le régime varie brusquement, est regardée par l'auteur comme une conséquence d'un principe de la stabilité du mouvement permanent, qu'on n'avait pas encore signalé, mais dont l'existence paraît incontestable. D'autres conséquences du même principe, se rattachant plus ou moins à celle-ci, qu'un mode d'écoulement ne devient persistant ou stable que lorsque le centre de gravité des masses fluides est le plus bas possible, lui permettent de porter quelque lumière sur la difficile question des déversoirs, libres ou noyés, et d'y lever certaines indéterminations apparentes, provenant d'une multiplicité de racines des équations algébriques qui les expriment.

Un autre problème de mouvement permanent, qui se trouve traité pour

la première fois dans ce mémoire, est l'étude du régime produit dans un canal dont le fond présente, d'amont en aval, une suite périodique de renflements et de creux, c'est-à-dire d'ondulations régulières, s'étendant sur toute la largeur. M. Boussinesq calcule l'amplitude et la situation des ondes de même longueur qui se forment à la surface. Il trouve que ces ondes sont peu sensibles, si la pente moyenne du fond est seulement de quelques dix-millièmes, et qu'elles tendent même à s'effacer, ou que la pente de la surface tend à devenir égale à la moyenne de celles du fond, quand la hauteur d'eau augmente, c'est-à-dire quand le cours d'eau roule un plus grand volume de liquide : mais ces mêmes ondes deviennent, au contraire, beaucoup plus hautes que les inégalités du fond, lorsque la pente moyenne de ce dernier approche de celle des torrents dits *modérés* (0,0036 en moyenne) ; etc. La surface est parallèle au fond, et les filets fluides le sont tous entre eux (quoique courbes), quand la pente reçoit une valeur particulière, proportionnelle au carré du rapport de la longueur d'onde à la profondeur moyenne; etc.

L'auteur traite aussi de l'influence régulatrice des cours d'eau naturels sur les lits qui les contiennent. Par exemple, entre autres circonstances concernant le mouvement dans les coudes, il calcule l'approfondissement qui, pendant les crues, se produit près de la berge concave d'un tournant de rivière, approfondissement qu'il trouve être en raison directe de la racine carrée de la courbure du coude : ce que confirment en moyenne un grand nombre d'observations de M. Fargue sur la Garonne.

Parmi les questions de mouvement non permanent qu'il a également résolues pour la première fois, et auxquelles il a pu appliquer sa formule générale des écoulements graduellement variés, distinguons surtout le problème des ondes de translation, ou intumescences limitées, tant positives que négatives, propagées le long d'une eau courante, soit qu'elles descendent le courant, soit qu'elles le remontent. Non seulement l'analyse en donne simplement les vraies vitesses de propagation ; mais elle y décèle les nuances les plus délicates qu'une minutieuse observation ait fait connaître, touchant les petites anomalies apperentes que présentent ces vitesses, touchant la déformation plus ou moins rapide des ondes et leur aplatissement habituel, touchant l'influence du frottement extérieur, de plus en plus retardatrice de la tête à la queue de l'intumescence et cause de retards croissants dans les phases des variations de niveau comparées à celles de la vitesse moyenne, etc.

L'auteur aborde également, sous le titre de *régime quasi-permanent*

*des cours d'eau*, la qnestion de la marche de ces ondes positives ou négatives, très longues et très aplaties, qu'on appelle des *crues* ou des *décrues*. La théorie en est assez simple quand on se borne, comme il le fait, au cas où les variations de régime étudiées se produisent assez lentement pour que la vitesse moyenne diffère peu, à chaque instant, de ce qu'elle serait dans un écoulement permanent où la pente de superficie et la profondeur recevraient leurs valeurs actuelles. Cette théorie avait été ébauchée, et même constituée à une première approximation, par MM. les ingénieurs Philippe Breton, Graëff et Kleitz, qui avaient notamment évalué la vitesse avec laquelle se propage chaque valeur du débit. M. Boussinesq. passant à une deuxième approximation (beaucoup plus difficile), calcule la correction qu'il faut faire subir à l'expression de la hauteur d'eau corrélative à un débit donné, pour tenir compte de la non-permanence du régime. Il reconnaît, par exemple, que la profondeur vraie est moindre, ou la vitesse plus forte, pour un certain débit, quand celui-ci est en train de croître que lorsqu'il diminue : circonstance dont on peut conclure rigoureusement, en recourant à la condition de conservation des volumes fluides, que les crues s'aplatissent peu à peu ; etc. Il explique aussi, très-simplement, la forme bombée et la forme concave que présente souvent le profil transversal d'un cours d'eau, suivant qu'il éprouve une crue ou une baisse rapides ; etc.

16. — *Additions et éclaircissements au mémoire intitulé « Essai sur la théorie des eaux courantes ».*

(Recueil des Savants étrangers de l'Académie des Sciences de Paris ; t. XXIV, p. 1 à 64 ; le Rapport approbatif, du 13 septembre 1875, se trouve au tome LXXXI, p. 464 des Comptes-Rendus.)

17. — *Complément à une étude intitulée « Essai sur la théorie des eaux courantes », etc.*

(Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1878 ; t. IV, p. 335 à 376.)

Parmi les nombreuses questions traitées dans ces compléments au précédent mémoire, signalons ici :

1° Une détermination approximative des lois de l'écoulement, uniforme ou graduellement varié, dans les tuyaux et les canaux d'un calibre médiocre, par simple intercalation entre les deux cas extrêmes des écoulements bien

continus que présentent les petits tubes polis et des écoulements tumultueux, où l'agitation tourbillonnaire se développe pleinement, propres aux conduits à grandes sections. On en déduit, par exemple, que la vitesse moyenne dans les petites rigoles d'arrosage est, entre des limites assez étendues, sensiblement proportionnelle au rayon moyen (comme l'avait déjà observé M. Bazin) et à la puissance $\frac{2}{3}$ de la pente. Mais il en résulte surtout l'explication de ce fait, que, dans les cas des tuyaux de conduite ordinaires et des canaux de quelques décimètres de profondeur, les coefficients exprimant le produit de la pente par le rayon moyen et par l'inverse du carré de la vitesse varient en sens inverse de la vitesse et surtout du rayon moyen, pour ne devenir à peu près constants que lorsque ce dernier atteint une certaine grandeur ;

2° Le calcul de la réduction de pente que produit l'endiguement continu de tout cours d'eau qui avait réglé lui-même peu à peu son lit primitif, réduction observée par M. Dausse (aujourd'hui correspondant de l'Académie) et résultant de l'entraînement des matières du fond qu'occasionne l'accroissement de vitesse dû à la diminution de la largeur: la nouvelle pente de régime uniforme est sensiblement proportionnelle à la largeur laissée au cours d'eau, pourvu que celle-ci reste, bien entendu, beaucoup plus grande que la profondeur ;

3° La démonstration de ce fait, que le profil longitudinal *moyen* d'un cours d'eau est calculable par la formule du mouvement permanent graduellement varié, aux endroits où une série d'ondulations transversales de la surface mettent obstacle à l'existence de ce régime, comme il arrive, par exemple, à l'aval des ressauts ;

4° L'évaluation de l'influence qu'exercent les variations de la largeur, dans un canal à bords verticaux mais non parallèles (c'est-à-dire divergents ou convergents), sur la vitesse de propagation des divers éléments, soit de volume, soit d'énergie, d'une onde de translation, positive ou négative ;

5° L'application approximative des lois de Poiseuille à l'écoulement du mercure dans de petits tubes en verre sous l'influence de pressions assez fortes, en la justifiant par cette considération, que le frottement réciproque du mercure et du verre croît sans doute avec la pression et doit, quand celle-ci est un peu grande, diminuer la vitesse à la paroi au point de l'annuler presque comme s'il s'agissait d'un liquide mouillant le tube.

18. — *Des pertes de charge qui se produisent dans l'écoulement d'un liquide, quand la section vive du fluide éprouve un accroissement brusque.*

(Comptes-Rendus, 30 septembre 1878 ; t. LXXXVII, p. 491, et § 111 du Complément précédent à l'Essai sur la théorie des eaux courantes, p. 366 à 371 du t. IV du Journal de Mathématiques.)

La formule classique de Borda fait connaître, avec une certaine approximation, la perte de charge qui se produit, dans les tuyaux de conduite, aux endroits où les filets fluides divergent brusquement : cette perte égale la hauteur de chute correspondant à la vitesse moyenne perdue par les filets fluides. M. Belanger, qui a, d'une manière très plausible, déduit cette formule du principe des quantités de mouvement, a pu évaluer par la même méthode la perte de charge qu'éprouve un liquide, s'écoulant dans un canal prismatique découvert, quand il y a ressaut, c'est-à-dire quand la section fluide croît brusquement : cette perte, pour un canal rectangulaire, vaut le quotient du cube de la hauteur du ressaut par quatre fois le produit des deux profondeurs du liquide avant et après le relèvement. La différence des deux formules tient à ce que, dans le cas d'un tuyau où pénètrent des filets fluides qui ne l'occupent pas d'abord tout entier, mais qu'achève de remplir, près de l'entrée, une certaine quantité de liquide tourbillonnant, les deux sections fluides précédant et suivant l'épanouissement des filets supportent, à leur partie supérieure, des pressions différentes, et ont même aire *totale* (quoique la première ne soit pas en totalité une section *vive*), tandis que, dans le cas du ressaut, les deux pressions considérées (s'exerçant sur le haut des deux sections) sont égales, mais les deux sections fluides différentes, et *vives* dans leur totalité.

Il y avait donc lieu de chercher ce qui se produit dans le cas général où les deux sections et les deux pressions, tout à la fois, diffèrent et où, de plus, les filets fluides n'occupent pas toute la section amont, comme il arrive quand il s'agit d'un tuyau horizontal qui, plein de liquide du côté aval, est, à son extrémité amont, traversé par des filets affluents qui y laissent une partie vide et une autre occupée par du liquide *mort*. C'est ce que fait M. Boussinesq. Il trouve que la perte de charge a pour expression celle que donne la formule de Borda, diminuée d'un terme positif, qui, dans la supposition simple d'une largeur à fleur d'eau sensiblement constante sur toute la surface libre, vaut le produit de la différence de niveau, existant entre les

points les plus hauts des deux sections extrêmes, par le rapport de la différence des aires de ces deux sections au double de la plus grande, c'est-à-dire au double de la section d'aval. Il transforme ensuite cette formule en une autre à trois termes, dont un ou deux, à tour de rôle, sont nuls, et les autres essentiellement positifs, dans les trois cas importants d'un tuyau partout plein, d'un canal découvert, et d'un tuyau qui est plein sur la seconde section, en partie vide, mais sans *section morte*, sur la première. Ce troisième cas, bien qu'assez usuel, avait été négligé complètement par les traités d'hydraulique. Le deuxième conduit aisément à une expression de la perte de charge où n'entrent que les aires des deux sections ou de leurs parties vives, et l'élévation du niveau entre la première et la seconde : quand la section amont n'a pas de partie morte, le phénomène étudié est un simple ressaut et l'expression obtenue se confond avec celle qu'a donnée M. Belanger.

19. — *Sur la manière dont les frottements entrent en jeu, dans un fluide qui sort de l'état de repos, et sur leur effet pour empêcher l'existence d'une fonction des vitesses.*

(Comptes-Rendus, 29 mars 1880, t. XC, p. 736.)

M. Boussinesq montre comment l'influence retardatrice du frottement des parois qui limitent une masse fluide se transmet dans toute la masse, *dès l'instant où celle-ci entre en mouvement*, et il exprime, par une intégrale empruntée à la théorie analytique de la chaleur, les vitesses croissantes qui se produisent alors à diverses distances d'une paroi, sous l'action d'une force accélératrice constante qu'on suppose s'exercer, à partir d'un certain moment, sur tout le fluide. Cette intégrale prouve que, si l'on représente l'influence retardatrice de la paroi en un point du fluide par la fraction perdue de la vitesse totale qu'on aurait observée en ce point sans les résistances passives, chaque degré de cette influence se propagera à des distances diverses $z$ de la paroi au bout de temps proportionnels à leurs carrés $z^2$.

La même intégrale met aussi en évidence le défaut d'une démonstration, que semblait pouvoir permettre de déduire des équations indéfinies classiques de Navier l'extension, aux fluides à frottements que ces équations régissent, du théorème de Lagrange pour les fluides dits parfaits, touchant l'existence d'une fonction $\varphi$ qui a ses dérivées premières en $x$, $y$, $z$ égales aux trois

composantes respectives de la vitesse toutes les fois que cette fonction existe à une époque particulière.

20. — *Etude théorique des nappes liquides rétractiles observées par Savart.*

(Comptes-Rendus, 5 et 12 juillet 1869, t. LXIX, p. 45 et 128. Voir aussi l'Essai sur la théorie des eaux courantes, p. 639 à 659.)

On connait les belles expériences dans lesquelles Savart lançait verticalement, de haut en bas ou de bas en haut, une veine liquide contre un petit disque circulaire horizontal : la veine s'étalait, autour de la verticale menée par le centre du disque, en une nappe mince de révolution, qui, pour des vitesses initiales assez petites, se recourbait et venait se fermer inférieurement avant de s'être troublée ou réduite en gouttelettes. M. Boussinesq, en étudiant théoriquement ce phénomène, a donné le premier exemple, unique jusqu'ici, que l'on ait d'une solution d'un véritable problème de dynamique où soit en jeu l'action capillaire. Il forme d'abord les équations différentielles du mouvement d'une particule liquide; puis, transformant diversement la courbure moyenne de la nappe, il les intègre une première fois et obtient, d'une part, l'équation différentielle première du méridien, entre son arc et ses deux coordonnées, d'autre part, une équation finie qui donne le temps. Il reconnait aussi qu'une certaine relation entre la vitesse initiale et les deux coordonnées doit être constamment satisfaite, pour que la nappe soit stable ou persistante. Les diverses équations ainsi trouvées suffisent pour déterminer toutes les circonstances de forme, de courbure, etc., que présente la nappe; et elles se trouvent en parfait accord avec les résultats de l'observation. Quant au calcul des dimensions absolues des nappes, il ne peut généralement se faire que de proche en proche, par intégrations numériques approximatives, et l'auteur l'effectue dans deux cas, pour lesquels les dimensions trouvées sont bien comparables à celles que l'observation donne: seulement, une confrontation exacte n'est pas possible, parce que Savart a négligé de mesurer certaines quantités que la théorie suppose connues, surtout l'angle fait avec l'horizon par la nappe au départ du plan.

M. Van der Mensbrugghe, dans un mémoire *Sur une nouvelle application de l'énergie potentielle des surfaces liquides* (*Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, 2^me^ série, t. XLVI, n° 11; 1878), suppose que l'extension rapide éprouvée par les couches superficielles de la nappe les refroidit considérable-

ment, au point de faire varier d'une manière sensible leur tension et, par suite, la constante de Laplace ou coefficient de capillarité. Il juge donc que l'auteur n'aurait pas dû admettre la constance absolue de ce coefficient [1]; mais il se dispense de chercher ce que deviendraient, dans l'hypothèse de sa variabilité, les équations différentielles du mouvement et, surtout, leurs intégrales, dont le calcul ne laisse pas que d'être assez délicat avec un coefficient de capillarité constant. D'ailleurs, si l'on ne se contentait pas de cette hypothèse simple, qu'ont faite tous les géomètres qui se sont occupés de la capillarité, d'autres difficultés surgiraient ; il faudrait, comme l'a montré M. Boussinesq, tenir compte d'une certaine différence qui doit exister entre les deux pressions exercées par l'air sur les deux faces de la nappe, vu que celle-ci tend à entraîner dans son mouvement le gaz qui l'avoisine et à faire le vide à son intérieur, du moins quand elle est fermée.

## II. — Théorie de l'élasticité des solides.

### 21. — *Equations des petits mouvements des milieux isotropes comprimés.*

(Comptes-Rendus, 22 juillet 1867 ; t. LXV, p. 167 Voir aussi le Journal de Mathématiques de 1868, t. XIII, p 209 à 219 et 239 à 241.)

Les plus simples et les plus importants des solides élastiques, après ceux qu'on appelle *isotropes* ou *d'élasticité constante* et qu'on suppose pareillement constitués dans tous les sens, sont les solides isotropes déformés, c'est-à-dire ceux qui, d'abord isotropes, ont été soumis, suivant trois directions rectangulaires, à des tractions ou pressions assez considérables pour changer d'une manière sensible leur structure. M. de Saint-Venant a cherché le premier, en 1863, les expressions de leurs forces élastiques : il a trouvé que leur mode de contexture intérieure satisfait à des relations remarquables, caractérisant ce qu'il appelle une distribution ellipsoïdale des élasticités. Mais il a admis (au moins implicitement), dans cette analyse, que l'action réciproque de deux molécules intégrantes d'un solide est une simple fonction de la distance de

(1) Pourtant, d'après la table des valeurs de la constante de Laplace qu'ont dressée divers physiciens, ce coefficient ne croîtrait que d'un cinquantième environ de sa valeur (ce qui est insignifiant) quand même la température s'abaisserait, par exemple, de 10° à 0°.

leurs centres de gravité, lesquels seuls ont leurs déplacements représentés dans les formules usuelles de la théorie de l'élasticité (vu qu'on y fait abstraction des rotations ou déformations locales, plus ou moins complexes, de ces molécules intégrantes). Or, même en accordant que l'action de deux atomes ne dépende toujours que de leur seule distance, on peut douter que l'action totale de deux molécules intégrantes d'un solide admette une expression aussi simple (surtout lorsqu'il s'agit de déformations *persistantes* capables d'altérer la composition des molécules jusqu'à détruire ou changer leur *individualité*); et d'ailleurs, on ne s'explique guère, dans cette hypothèse, comment les molécules du corps ne reviennent pas à leurs situations primitives dès qu'on supprime les actions déformatrices, c'est-à-dire comment il se fait que de légères altérations de contexture persistent définitivement.

Il y avait donc lieu d'envisager la question à un autre point de vue, en s'appuyant seulement sur la loi générale de continuité et sur l'hypothèse de l'isotropie du corps primitif. C'est ce qu'a fait M. Boussinesq en 1867, avant de connaître M. de Saint-Venant et de savoir que le problème avait déjà été traité. Le point de départ de son analyse consiste à supposer que les changements de contexture produits, assez faibles par hypothèse, ajoutent aux coefficients d'élasticité du corps (tant à ceux qui existaient déjà qu'à ceux qui étaient nuls), de petits termes, du premier degré par rapport aux actions déformatrices employées successivement, termes qui peuvent en outre dépendre du temps. Il lui suffit d'exprimer d'ailleurs que la contexture était d'abord isotrope, qu'elle est restée symétrique par rapport aux plans rectangulaires sur lesquels se sont exercées normalement les pressions ou tractions, et qu'elle serait même restée isotrope autour d'un axe si les pressions déformatrices s'étaient trouvées pareillement distribuées tout autour de cet axe, pour obtenir les formules découvertes par M. de Saint-Venant, et exprimant la distribution ellipsoïdale des élasticités.

22. — *Sur des relations générales et nouvelles entre l'énergie interne d'un corps et ses forces élastiques.*

(Comptes-Rendus, 5 septembre 1870 ; t. LXXI, p. 400, et Recueil des Savants étrangers de l'Académie des Sciences de Paris, t. 20, p. 584 à 604, note 3 d'un mémoire sur les ondes liquides périodiques.)

Dans la plupart des applications de la théorie de l'élasticité, les corps peuvent être supposés d'abord à l'état naturel, c'est-à-dire soustraits à toute

pression s'exerçant à leur intérieur ou sur leur surface, et les termes qui entrent, ultérieurement, dans les expressions de leurs forces élastiques, sont tous affectés des très-petites déformations produites. Alors ces expressions sont homogènes, du premier degré, et leurs dérivées par rapport aux coordonnées primitives n'ont aucun terme dont il faille, dans les formules, conserver les produits par des quantités de l'ordre des déformations, à côté d'autres termes fonctions linéaires de celles-ci. Il en résulte que les forces élastiques s'exerçant sur l'unité de surface *actuelle* d'éléments plans *actuellement* normeux aux axes peuvent n'être pas distinguées de celles que supporte l'unité de surface *primitive* d'autres éléments plans, *primitivement* normeux aux axes et ayant pour coordonnées *primitives* les coordonnées actuelles des premiers. Il en résulte aussi que, dans les équations de mouvement déduites de la considération d'un parallélipipède élémentaire actuellement rectangle, et dans les expressions des travaux des forces appliquées à ses faces, des dérivées prises par rapport aux coordonnées actuelles peuvent être confondues avec celles qu'on prendrait par rapport aux coordonnées primitives ou d'état naturel. C'est dans ces hypothèses restrictives que les géomètres, sans l'avoir suffisamment remarqué, ont établi les formules usuelles de la théorie de l'élasticité, notamment les équations indéfinies de l'équilibre ou du mouvement et les relations, déduites du principe de l'énergie, par lesquelles on exprime les composantes des pressions au moyen des six dérivées partielles du *potentiel*, dit *d'élasticité*, par rapport aux six déformations correspondantes.

Or, les réductions ainsi effectuées ne sont permises, ni dans la question des ondes liquides, où la dérivée de la pression dans le sens vertical est finie quelque petits que soient les déplacements, ni, en général, dans le problème des vibrations d'un solide que l'on comprime fortement et inégalement, en sens divers, avant de l'ébranler. Donc, et quoiqu'il suffise de rétablir dans ces cas exceptionnels les plus influents des termes négligés, il y avait lieu, d'une part, de chercher les équations générales exactes de l'équilibre ou du mouvement, quand on prend pour variables indépendantes les coordonnées primitives et que les déplacements et les pressions ont des grandeurs quelconques, d'autre part, de chercher comment s'expriment alors, en fonction des dérivées partielles du potentiel et de celles des déplacements, les composantes des différents genres de pressions que l'on peut avoir à considérer. C'est ce qu'a fait M. Boussinesq, en appliquant des méthodes dont le principe était connu, mais avec plus de précision qu'on n'en avait apporté et dans des conditions d'une difficulté toute spéciale. La

symétrie des formules trouvées compense leur complication. Dans la supposition d'une petitesse des déplacements suffisante pour qu'on puisse supprimer leurs carrés et produits devant leurs premières puissances, cette analyse conduit, entre autres résultats, à des formules découvertes par Cauchy et dont M. de Saint-Venant a montré plus d'une fois la réelle importance. Mais Cauchy les avait établies en partant de l'hypothèse, aujourd'hui contestée, d'actions mutuelles fonction de la seule distance des deux molécules qui les exercent l'une sur l'autre, supposition que M. Boussinesq s'abstient de faire.

23. — *Etude nouvelle sur l'équilibre et le mouvement des corps solides élastiques dont certaines dimensions sont très petites par rapport à d'autres. — Premier mémoire : Des tiges.*

(Comptes-Rendus, 3 avril 1871, t. LXXII, p. 407, et Journal de Mathématiques, 1871; t. XVI, p. 125 à 240.)

24. — *Deuxième mémoire : Des plaques planes.*

(Comptes-Rendus, 10 avril 1871 ; t. LXXII, p. 449, et Journal de Mathématiques, 1871, t. XVI, p. 241 à 274.)

25. — *Complément à une étude de* 1871 *sur la théorie de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques dont certaines dimensions sont très petites par rapport à d'autres. — Première partie : Des tiges.*

(Journal de Mathématiques, 1879; t. V, p. 163 à 194.)

26. — *Deuxième partie : Des plaques.*

(Journal de Mathématiques, 1879; t. V, p. 329 à 344.)

Ce qui caractérise évidemment l'état mécanique des solides très allongés ou très aplatis (*tiges* et *plaques*), c'est que ces corps sont divisibles, par un ou par deux systèmes de sections normales, en une multitude de tronçons prismatiques courts, tels, que deux contigus se trouvent sensiblement dans les mêmes conditions et éprouvent, par suite, des déformations à peu près egales. On peut donc prendre pour point de départ naturel de leur théorie ce principe, que, abstraction faite de régions ou zones exceptionnelles, les déformations et les pressions, tout en pouvant varier beaucoup d'un point

à l'autre dans le sens des petites dimensions de ces corps, changent, au contraire, bien plus lentement dans les sens de leurs grandes dimensions. Comme, d'ailleurs, les forces extérieures et les inerties appliquées directement à un tronçon n'ont qu'une influence minime sur son état à côté de l'action qu'exercent les tronçons voisins, on peut prendre pour type des modes vrais de déformation de ces tronçons ceux de prismes en équilibre, dans lesquels la masse intérieure, ainsi que les faces latérales ou les bases, seraient libres de toute action extérieure, tandis que la constitution de la matière, les pressions et les déformations s'y trouveraient les mêmes, soit le long de chaque normale aux bases, soit sur toute l'étendue de chaque plan parallèle aux bases. Tel est le point de vue nouveau, ou du moins peu remarqué jusqu'ici des mécaniciens géomètres, auquel s'est placé M. Boussinesq dans les mémoires dont il s'agit.

Il a pu d'abord déduire de son principe, par une analyse absolument rigoureuse (et simple, une fois découverte), le *postulatum* que M. de Saint-Venant avait admis ou pris comme donnée, en tête de ses belles recherches sur la torsion et la flexion des prismes, sans le justifier autrement qu'*a posteriori* : il consiste en ce que les fibres longitudinales d'une tige n'exercent, les unes sur les autres, aucune action sensible dans des directions perpendiculaires à leurs longueurs, tout en pouvant en exercer suivant leurs tangentes. MM. Clebsch, Kirchhoff, W. Thomson et Tait, etc., qui ont reproduit, chacun à leur manière, les travaux de M. de Saint-Venant, se sont contentés, comme lui, d'admettre ce fait. M. Boussinesq démontre qu'il est toujours exact à une première approximation, et qu'il l'est même, dans le problème de la flexion des prismes, à cette deuxième approximation où l'on calcule, par la méthode qu'a donnée M. de Saint-Venant, les petits glissements et les gauchissements légers que font naître les efforts tranchants. Il l'établit d'ailleurs, non-seulement pour des prismes dont la matière est isotrope et homogène, mais aussi pour tous ceux où les sections normales sont seulement des plans de symétrie de contexture et où les fibres, sans être homogènes, sont telles, qu'elles éprouveraient, étant isolées, les mêmes contractions latérales si on les tirait de manière à les allonger toutes également : conditions aussi étendues qu'on peut le désirer dans la pratique, et nécessaires pour que les déformations de ces corps admettent des lois générales simples.

L'auteur développe ensuite, dans son ensemble, la théorie des tiges, en y introduisant un certain nombre d'aperçus nouveaux. Il prouve, par exemple,

d'une manière purement géométrique, une proposition importante de M. de Saint-Venant, d'après laquelle, dans le phénomène de la torsion d'un prisme, l'angle dont tourne chaque section normale par rapport à une autre est constant quelle que soit la fibre longitudinale que l'on prend pour axe de rotation. Il montre encore que, si l'on considère, d'une part, la section normale d'un prisme homogène plein et tordu, d'autre part, celle d'un tube poli et mouillé, ayant intérieurement même forme que ce prisme, et où, sous une certaine pente, coule par filets rectilignes, d'un mouvement uniforme bien continu, un liquide qui le remplit, les courbes d'égale vitesse tracées dans la section fluide seront partout de même direction que les forces tangentielles exercées aux points correspondants de la section du prisme tordu, et que la dérivée de la vitesse d'écoulement, à partir de chaque point d'une de ces courbes, suivant le sens qui lui est normal, sera numériquement égale à la force tangentielle s'exerçant par unité d'aire au même endroit du prisme. Il résulte aisément de cette analogie que les glissements maximums, dus à la torsion, se produisent, en général, en des points du contour voisins du centre, ou, s'il s'agit de certaines sections très évidées, voisins des centres partiels des principaux lobes qui les composent : loi pratique importante, vérifiée sur un grand nombre d'exemples qu'a pu traiter M. de Saint-Venant. Enfin, le moment total des forces qui produisent la torsion est numériquement le double du volume liquide débité par le tube dans l'unité de temps; etc.

Le premier mémoire, sur les tiges, se termine par un établissement complet des équations, tant indéfinies que définies (relatives, les unes, à des points déterminés, les autres, à l'état dynamique initial), du mouvement vibratoire, soit longitudinal, soit transversal, soit tournant, de barres élastiques, d'une section constante ou variable d'un bout à l'autre, unies, en quelques points, à des masses rigides : ce qui est une condition pour que les résultats de leurs intégrations puissent servir à la solution des problèmes de résistance vive mise en jeu par les chocs de pareilles masses, qui exécutent, avec les barres, toujours au moins la première vibration.

En étudiant les plaques au même point de vue naturel, M. Boussinesq arrive rapidement, sans aucune hypothèse accessoire et pour toute contexture de la matière, aux formules générales de leur théorie, notamment aux expressions des couples, dits *de flexion* et *de torsion*, qu'il faut connaître pour former l'équation indéfinie de la flexion. Il obtient donc, en particulier,

l'équation classique aux dérivées partielles du quatrième ordre, due à Lagrange et propre aux plaques planes isotropes.

L'analyse de l'auteur, embrassant les cas généraux où des tensions considérables existent antérieurement aux déformations étudiées, s'applique aussi aux *fils* et aux *membranes*, beaucoup plus flexibles qu'extensibles, et elle permet, par exemple, d'évaluer l'influence de leur degré de rigidité sur la hauteur des sons qu'ils émettent lorsqu'on les tend.

27. — *Sur les véritables conditions aux limites, dans le problème des plaques élastiques.*

(Comptes-Rendus, 11 décembre 1877; t. LXXXV, p. 1157.)

28. — *Sur la question des conditions spéciales au contour des plaques élastiques.*

(Comptes-Rendus, 14 janvier 1878; t LXXXVI, p. 108.)

29. — *Sur les conditions spéciales au contour des plaques.*

(Comptes-Rendus, 4 février 1878; t. LXXXVI, p. 304.)

Poisson a cherché le premier, pour une plaque élastique mince, les conditions générales, propres à ses bords, qu'il faut joindre aux équations indéfinies de l'équilibre ou du mouvement pour déterminer son état mécanique. S'appuyant sur le principe, en quelque sorte instinctif, que des forces extérieures appliquées à une petite partie du contour produisent sur la plaque, à une certaine distance de leur région d'application, les mêmes effets que d'autres forces statiquement équivalentes qui s'exerceraient sur cette même région, il a réduit à une résultante et à deux couples toutes celles qui sollicitent chaque mince bande du cylindre contournant comprise entre deux génératrices de ce cylindre. Il s'engageait donc implicitement, par le fait même, à ne pas considérer les vraies déformations produites dans chaque cas près du bord, mais seulement celles qui s'observent à l'intérieur, là où n'influent plus sensiblement les modes infiniment variés d'application des forces et des couples qu'il introduit. En d'autres termes, il transformait la question proposée en une autre infiniment plus simple, partant accessible, et qui n'en diffère pour ainsi dire pas aux yeux du physicien et de l'ingénieur.

Seulement, Poisson ne s'est pas aperçu que le même principe de réduction, sous les mêmes réserves, lui permettait, en faisant tourner convenablement dans son plan celui des deux couples (dit de torsion) dont les forces sont parallèles à la bande, de diriger ces forces suivant les génératrices et de les fondre par suite, pour toutes les bandes, dans les efforts tranchants, c'est-à-dire, en somme, dans les forces résultantes qu'il considère, de manière à ne conserver plus qu'un seul couple (dit de flexion) normal au contour. M. Boussinesq, complétant ainsi ce raisonnement implicite, a opéré, dans le memoire de 1871 sur les plaques. cette réduction des couples de torsion à des efforts tranchants ; réduction dont la possibilité et la nécessité résultaient déjà, d'ailleurs, d'une belle analyse de M. Kirchhoff empruntée à la méthode des variations qu'emploie Lagrange.

L'auteur ignorait, à cette époque, que MM. William Thomson et Tait avaient, quatre ans avant lui, en 1867, donné la même réduction, par la même voie géométrique, et qu'ils avaient exprimé approximativement les petites erreurs qu'elle entraîne, au moyen d'exponentielles très-rapidement décroissantes, se réduisant à des fractions complétement insensibles de leurs valeurs sur le bord, dès qu'on est à une distance du bord égale à une ou deux fois l'épaisseur de la plaque. Or, si l'on voulait mettre en compte de pareilles erreurs, qui ne sont considérables qu'au bord, il faudrait, du même coup, évaluer aussi celles de nature analogue qu'entraînent inévitablement les réductions déjà faites par Poisson et impliquées dans l'emploi de ses conditions aux limites. On ne gagne donc rien, sous le rapport de l'exactitude, à conserver, en sus des conditions strictement nécessaires pour déterminer l'état de la plaque à quelque distance du contour, la condition surabondante de Poisson, qui ne fait qu'empêcher de réduire les intégrales à leur forme la plus simple, en obligeant d'y introduire une des catégories des *perturbations locales* produites près du bord. Si, comme il vient d'être dit, l'on demandait une analyse propre à représenter l'état vrai du contour en même temps que celui de l'intérieur, ce n'est pas une condition de plus qu'il faudrait, mais bien une infinité, puisqu'on devrait exprimer, dans chaque cas, le mode effectif de distribution de la multitude de forces élémentaires dont se composent, et les couples de torsion, et les couples de flexion, et les efforts tranchants, etc. Aussi, sans entrer dans ces considérations qui sont dues à M. Boussinesq, MM. Thomson et Tait regardent-ils leur calcul des effets *propres* des couples de torsion, c'est-à-dire des effets que néglige la réduction de ces couples en efforts tranchants, comme une

nouvelle preuve, en quelque sorte *a posteriori*, de la légitimité de la réduction qu'avait opérée en premier lieu M. Kirchhoff par une méthode indirecte, et de l'inutilité de la condition surabondante de Poisson.

Or, en 1877, M. Maurice Levy, ayant retrouvé, pour exprimer les effets propres des couples de torsion, les mêmes termes que les illustres professeurs écossais, mais seulement sous une forme plus générale et beaucoup plus compliquée qui n'en montrait pas le vrai sens, a pensé que ces termes exprimaient de véritables déformations d'ensemble, aussi importantes que toutes les autres dont s'occupe la théorie classique des plaques, et il a reproché à M. Boussinesq d'avoir opéré la réduction (qui n'en tient nul compte) de deux des conditions de Poisson à une seule. Le but des trois articles rappelés en tête de ces lignes a été de répondre à cette critique. L'auteur y expose, plus clairement qu'on ne l'avait fait, l'état vrai de la question, dans le sens qui vient d'être indiqué : de plus, il réduit les termes trouvés par M. Levy à la forme approchée simple qui montre leur portée véritable et qui est précisément celle qu'avaient aperçue MM. Thomson et Tait dans leur livre de 1867.

30. — *Sur deux lois simples de la résistance vive des solides.*

(Comptes-rendus, 7 et 14 décembre 1874; t. LXXIX, p. 1324 et 1407.)

Dans une importante catégorie de problèmes sur le choc, on imagine qu'une barre élastique, d'abord en repos, soit heurtée longitudinalement ou transversalement par une masse solide qui ne la touche que dans une petite étendue, où il est permis de la supposer concentrée, et l'on étudie le mouvement qu'exécute la barre, pendant le temps où ce corps lui reste uni. Les lois d'un tel choc sont d'une extrême complication, si ce n'est dans le cas limite où l'on peut supposer l'inertie du corps élastique négligeable et où, par suite, le calcul de la forme de la barre à chaque instant dépend d'un problème de statique pure. Or, M. de Saint-Venant a vérifié, sur un assez grand nombre d'exemples, que deux circonstances importantes, savoir, la hauteur du son fondamental du choc et le déplacement maximum correspondant du corps heurté, pouvaient s'évaluer à fort peu près dans cette hypothèse simple, même quand l'inertie de la barre est loin d'être négligeable, à la condition de supposer que, la quantité initiale de mouvement de la masse heurtante restant la même, cette masse soit fictivement accrue de la somme des produits

de chaque élément de la masse heurtée par le carré du rapport de ses déplacements aux déplacements simultanés du corps heurtant, tous ces déplacements étant calculés en effet dans la supposition d'une déformation purement statique du corps heurté.

Il restait à trouver la *raison* de ces deux curieuses lois, et à démontrer qu'elles sont générales. C'est ce que M. Boussinesq a fait directement, pour un corps élastique d'une forme et d'une constitution quelconques et non pas seulement pour une barre, en cherchant les expressions générales des mouvements simples produits par le choc, et en prouvant que, lorsqu'on se borne au son fondamental rendu par le système vibrant et aux déplacements qu'éprouve le point heurté, ces expressions dépendent d'une certaine intégrale, transformée du potentiel d'élasticité, à laquelle une valeur relativement assez petite de la masse du corps heurté n'ajoute que des termes comparables en tout au carré de cette valeur. L'auteur étend même la loi à des cas où il y aurait plusieurs masses heurtantes. Enfin, il prouve que, dans les cas les plus usuels, où les mouvements sont à la fois de même sens pour tout le corps élastique, la durée de vibration du son fondamental est un quotient dont la loi énoncée conduit à altérer par défaut les deux termes : l'erreur relative du résultat n'est donc qu'une différence de deux autres, et l'on s'explique que M. de Saint-Venant ait trouvé cette loi encore assez bien vérifiée, même pour des rapports de la masse élastique à celle du corps heurtant qui, loin d'être très-petits, allaient jusqu'à deux, trois et quelquefois quatre.

31. — *Equilibre d'élasticité d'un sol isotrope sans pesanteur, supportant différents poids.*

(Comptes-rendus, 20 mai 1878, t. LXXXVI, p. 1260.)

32. — *Des déplacements que produit, à l'intérieur d'un sol élastique, une pression normale exercée en un point de sa surface.*

(Comptes-Rendus, 7 avril 1879 ; t. LXXXVIII, p. 741.)

La complication et le peu d'applicabilité des belles intégrales de l'équilibre d'une sphère, trouvées par Lamé, les recherches infructueuses des géomètres, pour aborder d'autres cas de solides à trois dimensions, étaient loin de faire penser, avant ces recherches, que les déformations produites dans un sol

élastique par le poids d'un petit corps déposé à sa surface, ou celles qu'on détermine dans un solide en le touchant, comportaient, au contraire, une expression éminemment simple. M. Boussinesq y a été conduit en cherchant à appliquer les potentiels d'attraction à ce problème, de la même manière qu'il l'avait fait en 1870 à la question de l'écoulement des liquides par les orifices. Imaginant une couche matérielle fictive étalée sur une partie de la surface du corps, et, d'autre part, un point quelconque intérieur au corps, il conçoit qu'on multiplie chaque élément de la couche par le logarithme népérien du total des deux distances du point à cet élément et au plan même de la couche; la somme de tous les produits pareils, qu'il appelle *potentiel logarithmique à trois variables,* et qui a pour une de ses dérivées premières le potentiel ordinaire relatif à la couche, lui donne, par diverses différentiations, trois types distincts des intégrales de l'équilibre du sol ou du corps considéré; et leur superposition constitue l'intégrale générale.

Dans le cas particulier d'une simple pression élémentaire $dP$, dirigée suivant une normale à la surface, les deux déplacements, l'un $w$, de même sens que cette normale, l'autre, $u$, dans le sens perpendiculaire qui s'en éloigne, valent respectivement

$$w = \frac{d\,P}{4\,\pi\,\mu\,r}\left(\frac{\lambda + 2\,\mu}{\lambda + \mu} + \cos^2\alpha\right),\quad u = \frac{d\,P}{4\,\pi\,\mu\,r}\left(\cos^2\alpha + \cos\alpha - \frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2},$$

au point situé à la distance $r$ du point d'application de la pression $dP$ et dans une direction faisant l'angle $\alpha$ avec cette pression : $\lambda$ et $\mu$ désignent les deux coefficients constants d'élasticité. L'enfoncement et la contraction qu'éprouvent des cercles concentriques ou conaxiques tracés, les uns, à la surface, autour du point pressé, les autres, à l'intérieur, sur des cônes de révolution ayant pour axe la pression exercée, sont donc régis par des lois très-simples, dont la première consiste dans leur proportionnalité inverse à la distance $r$ au sommet. Un de ces cônes, pour lequel la composante transversale $u$ du déplacement est nulle, entoure la matière qui s'éloigne de l'axe, sous l'effet de la compression, et la sépare de la matière qui, au contraire, s'en rapproche; etc.

33 — *Sur la dépression que produit, à la surface d'un sol horizontal, élastique et isotrope, un poids qu'on y dépose, et sur la répartition de ce poids entre les divers points de sa base d'appui.*

(Comptes-Rendus, 9 septembre 1878; t. LXXXVII, p. 402.)

34. — *Sur la manière dont se distribue entre ses points d'appui le poids d'un corps dur, posé sur un sol poli, horizontal et élastique : identité de ce mode de répartition, pour une base de sustentation plane et horizontale, avec celui d'une charge électrique en équilibre sur une plaque mince de même forme que cette base.*

(Comptes Rendus, 7 octobre 1878, t. LXXXVII, p. 519.)

35. — *Sur une loi intuitive, d'après laquelle se répartit le poids d'un disque circulaire solide, supporté par un sol horizontal élastique.*

(Comptes-Rendus, 30 décembre 1878 ; t. LXXXVII, p. 1077.)

Dans ces articles, l'auteur superpose les effets d'une infinité de pressions élémentaires $dP$, s'exerçant sur tous les éléments d'une région finie de la surface d'un sol ou d'un corps élastiques, et il calcule la forme que prend alors cette surface, tant dans la partie directement comprimée que dans celle qui reste libre. Comme on peut supposer de pareilles pressions, snr un sol horizontal, par exemple, dues à une mince couche d'un sable très-lourd dont chaque grain pèserait sur l'élément sous-jacent de la surface, et comme d'ailleurs chaque pression $dP$ produit des enfoncements partout proportionnels au produit de $dP$ par l'inverse de la distance à son point d'application, l'enfoncement total sera de même représenté, sur toute la surface, par le potentiel ordinaire ou inverse relatif à la couche. Le calcul en est facile, soit, à d'assez grandes distances de la région d'application, quelque compliqué que soit le mode de distribution de la charge, soit même partout dans bien des cas, notamment quand la région d'application est circulaire et que la pression y est distribuée, ou uniformément, ou paraboliquement le long de chaque rayon et de la même manière sur tous, etc., ou encore de manière que la surface d'application reste plane et horizontale. Dans ce dernier cas, l'enfoncement commun de la région comprimée s'écarte peu de la moyenne des enfoncements qui seraient produits en ses divers points, si la pression totale s'y trouvait distribuée uniformément. Mais cette charge totale est loin d'être ainsi répartie : c'est sur toute une calotte demi-sphérique, décrite avec le cercle d'application comme base, qu'il faudrait la distribuer uniformément, si l'on voulait qu'ensuite, en laissant tomber verticalement sur le cercle d'application chaque partie de la charge, elle s'y trouvât disposée comme il convient pour que la région d'application reste plane et horizontale. Une loi analogue, un peu moins simple, s'applique à toute région d'application elliptique qui doit également rester plane et horizontale.

L'auteur démontre qu'il n'y a qu'une seule manière, de répartir la pression, qui donne à la surface comprimée une forme définie, plane ou courbe ; si donc on connaît cette forme, comme il arrive quand un corps pesant et poli, beaucoup plus dur que le sol, y reste déposé et lui communique l'empreinte de sa base de sustentation, le mode de distribution de son poids entre tous les éléments de cette base sera parfaitement déterminé. Par suite, si la base se trouve être, ou l'une des surfaces courbes calculées précédemment, ou simplement un plan horizontal, ce mode sera, ou uniforme, ou parabolique, etc., ou uniforme sur un tableau hémisphérique à la surface duquel on verrait, d'un point situé à l'infini au-dessus du centre, la charge se projeter en perspective, etc. Il y aura toutefois, en réalité, comme dans un grand nombre d'autres questions de physique mathématique, des anomalies ou *perturbations locales*, sans influence sur l'ensemble, aux endroits spéciaux où des presssions trop fortes par unité d'aire mettraient en défaut l'hypothèse approximative de la persistance absolue de forme de la base [1].

Ainsi se trouve résolu, pour les cas les plus simples, un problème intéressant de philosophie naturelle, qu'on n'avait pu traiter encore, quoiqu'il eût été soulevé, depuis un siècle, par d'Alembert et Euler, savoir, le problème de la répartition du poids d'un corps, posé sur le sol, entre tous les éléments de la surface de contact.

(1) C'est ce qui arrive au contour d'un disque plat, posé sur le sol, quand on suppose ce contour, non pas arrondi, mais taillé en arête vive. La forme plane exigerait, pour être maintenue jusqu'au bord même, une pression (par unité d'aire) supérieure à toutes celles que peuvent comporter les degrés de résistance du sol élastique et du disque placé au-dessus, si dur qu'il soit. En réalité, une zône mince, contiguë au contour, d'autant plus étroite que le disque est plus rigide par rapport au sol, et sans influence sur l'ensemble (parce qu'elle ne supporte qu'une pression totale insignifiante), sera soumise à des lois spéciales très compliquées : d'une part, le disque y fléchira; d'autre part, le sol lui-même y éprouvera de grandes déformations locales, qui pourront aller jusqu'à la désagrégation (au moins pour un disque d'un certain poids).

Des discontinuités analogues, tenant à des hypothèses simplificatrices trop absolues introduites dans les calculs, se présentent parfois en physique mathématique. Citons, par exemple, la densité infinie que devrait avoir une charge électrique sur le bord d'une plaque conductrice limitée par un contour convexe ce qui n'empêche pas tous les géomètres physiciens, qui s'occupent d'électricité, de donner, comme un des principaux résultats de l'électro-statique, la répartition (où cette difficulté se présente) d'une charge électrique à la surface d'un disque elliptique ou circulaire. MM. Thomson et Tait ont trouvé de même, dans le problème de la torsion d'un prisme ayant pour section normale un secteur de plus de 180°, que l'arête de l'angle dièdre rentrant du prisme y supporterait, par unité d'aire de sa section, un effort tranchant infini ; etc. Il est donc des cas où la nature repousse absolument les arêtes vives et exige qu'on les remplace par des parties à très grande courbure.

De fait, les arêtes et les angles, pris en toute rigueur, ne sont que des constructions idéales, dont la réalité peut approcher sans être tenue de les reproduire d'une manière adéquate. On ne les introduit que pour simplifier certains problèmes : car, si la continuité simplifie les choses quand elle en relie plusieurs qui suivent une même loi, elle les complique, au contraire, le plus souvent, lorsqu'elle établit la transition entre deux catégories de faits régies par deux lois simples différentes ; et c'est alors une discontinuité fictive, un passage brusque de la première catégorie à la seconde, qui rend les questions abordables.

36. — *Sur une propriété simple, qui caractérise le mode de répartition du poids d'un solide, posé sur un sol horizontal élastique, entre les diverses parties de sa base, quand celle-ci est une ellipse horizontale.*

(Comptes-Rendus, 4 novembre 1878 ; t. LXXXVII, p. 687 )

Cette propriété consiste en ce que tout système de droites parallèles et équidistantes, infiniment voisines, divise l'ellipse de sustentation en bandes également chargées, malgré l'extrême inégalité de leurs longueurs.

37. — *Du potentiel cylindrique ou logarithmique à trois variables et de son emploi dans la théorie de l'équilibre d'élasticité.*

(Comptes-Rendus, 31 mars 1879 ; t. LXXXVIII, p. 701.)

38. — *Application des potentiels directs de Lamé au calcul de l'équilibre d'élasticité d'un solide isotrope et homogène indéfini, sollicité dans une étendue finie par des forces extérieures quelconques.*

(Comptes-Rendus, 17 février 1879 ; t. LXXXVIII, p. 331.)

39. — *Lois géométriques des déformations que produit une force, appliquée en un point d'un solide indéfini, et calcul des erreurs que l'on commet lorsque, d'après les principes de la mécanique classique, on conçoit ce point d'application déplacé dans la direction de la force.*

(Comptes-Rendus, 24 février 1879, t. LXXXVIII, p. 375.)

Dans ces articles, l'auteur cherche ce que deviennent les trois types d'intégrales des équations indéfinies de l'équilibre d'élasticité qu'il avait déduits de la considération du potentiel logarithmique à trois variables, lorsque la matière fictive par rapport à laquelle on prend le potentiel n'est plus une simple couche, mais une masse quelconque. Alors ces types représentent des modes d'équilibre de corps homogènes, à l'intérieur desquels seraient appliquées, par unité de volume, certaines forces extérieures. L'un d'eux donne immédiatement la solution d'un problème déjà traité, d'une manière plus longue et assez

pénible, par MM. William Thomson et Tait, et il la donne sous une forme beaucoup plus simple que la leur, bien que concordante : c'est le problème des pressions et déformations que produisent, dans un solide supposé indéfini en tous sens (ou dont la surface est assez loin pour ne pas modifier les résultats), des forces quelconques, s'exerçant sur une partie connue de ce solide. Quand les forces se réduisent à une seule, élémentaire, les formules sont extrêmement simples : toute couche sphérique, découpée par la pensée dans le corps autour du point d'application comme centre, éprouve, suivant le sens de la force, un déplacement inversement proportionnel à son rayon, en conservant sa forme et sa grandeur, quoiqu'il y ait des glissements à sa surface ; etc.

40. — *Sur l'application des potentiels à la théorie de l'équilibre d'élasticité.*

Ce mémoire étendu, terminé depuis le mois de juin 1879, doit paraître en 1880 et 1881 dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées.* Outre le développement des idées résumées dans les neuf articles précédents, il contient :

1° Diverses généralisations, telles que l'étude des modes de déformation d'un sol élastique, transformés d'autres par rayons vecteurs réciproques ;

2° Le calcul des *perturbations locales* que produisent, dans des circonstances variées, des forces données se neutralisant (ayant résultante et moment totaux nuls) et appliquées toutes à l'intérieur d'une même petite région d'un corps, perturbations dont le décroissement est représenté, soit par l'inverse du cube de la distance à la région d'application, soit par une exponentielle à exposant négatif proportionnel à la distance, suivant que le corps est massif ou suivant qu'il a, au contraire, certaines dimensions beaucoup plus petites que d'autres ;

3° Des considérations synthétiques, montrant qu'en général toutes les *perturbations* compliquées, de la nature des précédentes, et dont la mécanique pratique est obligée de faire abstraction, sont incomparablement plus *localisées,* autour des points où siègent les causes qui les font naître, quand il s'agit des *tiges* et des *plaques*, dont les tronçons ont une certaine liberté les uns par rapport aux autres, que lorsqu'il est question de corps massifs, où la solidarité des parties est beaucoup plus grande : on vérifie ainsi que, dans les calculs

relatifs aux pièces qu'emploient les constructeurs, il est permis de négliger ces perturbations comme si elles n'existaient pas, sauf à renforcer quelquefois les endroits où elles ont lieu ;

4° Des réflexions prouvant que les *véritables solutions simples*, ou *intégrales simples*, des problèmes de physique mathématique, sont tout autres pour des milieux indéfinis que pour des corps limités. Dans un milieu indéfini, les solutions simples *vraiment naturelles,* ou ayant une signification concrète, correspondent au cas où la cause des phénomènes étudiés n'existe que dans une partie, infiniment petite en tous sens, de sa région possible d'application, et elles représentent les effets propagés de là dans tout le milieu ; tandis que, pour un corps limité, les intégrales simples correspondent aux cas où la cause des phénomènes s'exerce dans toute l'étendue de son siége possible, avec une intensité variable, calculée, précisément, de telle manière que les effets produits se propagent d'un point à l'autre ou d'un instant à l'autre en conservant leurs rapports primitifs. Quand on suppose que les dimensions du corps grandissent indéfiniment, le passage de ces dernières intégrales simples aux précédentes peut se faire en en condensant une infinité, parmi celles que donne, par exemple, l'application de la formule de Fourier, où l'on sait que les signes d'intégration définie vont toujours par deux, correspondant, l'un, à une variable d'intégration qui représente une coordonnée, l'autre, à une variable d'intégration auxiliaire. En d'autres termes, il faut grouper, sous les signes d'intégration définie qu'introduit la formule de Fourier et dont les variables ne sont pas des coordonnées, tous les éléments de la solution générale pour lesquels les autres variables d'intégration sont les coordonnées d'un même point de l'espace : cette somme, si l'on y effectue les intégrations, devient la solution simple naturelle pour le cas d'un milieu indéfini.

## III. — Mécanique des corps semi-fluides.

41. — *Intégration de l'équation aux dérivées partielles qui peut donner une deuxième approximation, dans le calcul rationnel de la poussée exercée contre un mur par des terres dépourvues de cohésion.*

(Comptes-Rendus, 4 avril 1870 ; t. LXX, p. 751 et Journal de Mathématiques de 1870, t. XV, p. 267. — Voir aussi le § IX de l'Essai théorique sur l'équilibre des massifs pulvérulents, etc, p. 105 à 133, au tome XL du Recueil in-4° des Savants étrangers de l'Académie Royale de Belgique).

Macquorn-Rankine a trouvé, en 1856, l'équation indéfinie caractéristique de l'état d'un massif pesant sablonneux qui commence à s'ébouler dans une certaine étendue : il lui a suffi, pour cela, de formuler la loi connue, d'après laquelle la pression la plus inclinée sur la normale à l'élément plan qu'elle sollicite fait avec cette normale, en chaque point du massif qui s'éboule, un angle égal à celui de frottement intérieur ou de terre coulante. Cette équation, jointe à celles de l'équilibre intérieur de tous les corps appliquées pour la supposition d'un massif se terminant supérieurement à un talus plan et indéfini dans les autres sens, lui fit reconnaître la possibilité et les lois de deux modes d'équilibre-limite, qui correspondent, l'un, au cas où le massif s'éboule par détente, comme lorsqu'un mur le soutenant inférieurement vient à s'écrouler, l'autre, au cas où il s'éboule par compression en refluant au-dessus de la surface, comme il arriverait si le mur, au lieu de fuir le massif, le refoulait au contraire sous l'effet d'une pression exercée du dehors. M. Maurice Levy a considéré aussi, en 1867, le premier de ces deux modes d'équilibre, et il a donné des formules propres à en déterminer les conditions, c'est-à-dire à calculer l'inclinaison que doit avoir la face postérieure d'un mur pour que ce mode se réalise jusque dans les couches do terre voisines du mur, quand on admet *a priori* que l'éboulement se produit partout à la fois, même au contact du mur de soutènement, ou que la poussée exercée contre ce dernier fait précisément avec la normale à sa face postérieure l'angle dit de frottement extérieur. Or, en examinant son mémoire, M. de Saint-Venant se demanda quels modes d'équilibre-limite, voisins de celui-là et ne s'en distinguant, dans les formules, que par des termes réductibles à leurs parties du premier ordre de petitesse, pourraient permettre de donner au mur des inclinaisons un peu différentes de l'inclinaison particulière obtenue, sans que la condition de l'éboulement cessât d'y être satisfaite au contact du mur et du massif.

Telle est la question à laquelle les recherches de M. Boussinesq, analysées ici, répondent, non-seulement pour le cas d'un massif ayant sa surface supérieure plane et que soutient un mur à face postérieure plane aussi, mais pour un massif et un mur dont les profils offrent de légères courbures, pourvu que leurs tangentes ne fassent pas des angles de plus d'une quinzaine de degrés avec les directions analogues correspondant au mode déjà étudié par Macquorn-Rankine. En intégrant d'abord les équations indéfinies, l'auteur trouve que l'expression la plus générale possible des nouveaux modes comprend deux fonctions arbitraires. Celles-ci, au moyen des conditions spéciales

à la surface supérieure ou libre, se déterminent ensuite pour tout l'espace compris entre le talus supérieur courbe, d'un côté, et, de l'autre côté, un mur plan *idéal*, qui, partant du bord de ce talus, aurait précisément l'inclinaison à laquelle conviendrait la solution particulière rappelée tout-à-l'heure, si on la calculait pour un talus plan d'inclinaison moyenne entre celles de la surface véritable du massif. Les deux fonctions arbitraires ainsi obtenues sont nulles, dans tout cet espace, quand le talus supérieur est plan. De plus, les mêmes conditions à la surface déterminent encore l'une des deux fonctions arbitraires, en dehors de cette région comprise entre le talus et le mur idéal, et cette fonction s'y trouve également nulle lorsque la surface est plane.

Par suite, quand le mur *vrai* à sa face postérieure hors de l'angle compris entre le talus supérieur et le mur idéal, ou que l'inclinaison de cette face sur la verticale est moindre que dans la solution Rankine-Levy, le massif comprend, outre la première région dans laquelle tout est déjà déterminé, une petite partie, contiguë au mur réel, et où rien n'empêche de choisir la seconde fonction arbitraire, restée disponible, de manière que la condition de glissement spéciale à la face postérieure du mur se vérifie. Alors l'état ébouleux est possible dans tout le massif, quoique ses lois changent au passage d'une région à l'autre, c'est-à-dire de part et d'autre de la face postérieure du mur idéal. Si, au contraire, cotte face est en dehors du massif, ou que le mur réel fasse avec la verticale un angle plus grand que le mur idéal, tout le massif est compris dans la première région, où les fonctions arbitraires sont déjà complétement déterminées, et il devient généralement impossible de satisfaire à la condition de glissement contre la paroi. Un résultat pareil indique que l'éboulement ne pourra pas s'étendre à tout le massif, et que le mur solide retiendra, par son frottement, une certaine masse de terre qui devra le suivre en bloc, du moins dans la première partie, seule considérée, de la chute.

Ces résultats prouvent que la théorie de l'équilibre-limite d'un massif pulvérulent est délicate: ils conduisent à ne pas affirmer, comme règle générale, que l'état ébouleux, lors du renversement d'un mur, se déclarera simultanément partout et sera régi, près du mur, par les mêmes lois qu'à une certaine distance. Rankine avait eu sans doute le pressentiment de ces difficultés, quand, dans son mémoire de 1856, il a évité, autant qu'il l'a pu, de se prononcer snr ce qui se passe au contact des murs et du massif. A cet effet, il regarde comme faisant corps avec le mur (dn moins dans le cas d'un mur à fruit intérieur) un coin de terre contigu, qu'il délimite du

côté du massif par un simple plan vertical, et il prend pour valeur de la *poussée* la pression (extrêmement facile à calculer et à construire) que supporte ce plan vertical ou cette face idéale au moment où le corps du massif passe à l'état ébouleux.

Le *résultat pratique* auquel il est ainsi conduit, pour la condition d'équilibre du mur, ne diffère pas d'ailleurs, dans le cas d'un mur à *fruit intérieur* dont la face postérieure est dirigée comme le suppose M. Levy (c'est-à-dire suivant l'un des deux systèmes des joints *naturels* de rupture du massif), du résultat qu'on obtient en employant la formule de poussée donnée pour ce cas par M. Levy : car, le coin de terre ayant alors sa base en haut, sur le talus, et libre de toute pression, il y a équilibre entre son poids et les pressions que supportent ses deux faces ; en sorte que la poussée considérée par M. Levy, ou exercée sur le mur *vrai*, produit la même impulsion totale et a le même moment total que l'ensemble de la poussée fictive considérée par Rankine et du poids même du coin de terre, que Rankine ne manque pas de mettre en compte.

42. — *Sur l'équilibre d'élasticité des massifs pulvérulents.*

(Comptes-rendus, 29 décembre 1873 ; t. LXXVII, p. 1521.)

43. — *Essai théorique sur l'équilibre des massifs pulvérulents, comparé à celui de massifs solides, et sur la poussée des terres sans cohésion.*

(Recueil in 4° des Savants étrangers de l'Académie Royale de Belgique, t. XL, 1876, 180 pages.)

Ces mémoires contiennent, outre le développement des théories résumées au numéro précédent, un essai sur les équilibres stables que peut admettre un massif sablonneux, et qui sont compris entre les deux modes d'équilibre-limite, par détente et par compression (*poussée* et *butée* des terres), rappelés ci-dessus. Il était naturel, en effet, de se demander ce qui se passe dans les massifs sablonneux alors qu'ils sont en repos : ce qui est bien l'état dans lequel on veut les maintenir, et ce qui peut conduire à la connaissance des vraies poussées qu'ils exercent lorsqu'on les soutient avec des murs d'une épaisseur donnée, plus grande que l'épaisseur-limite pour laquelle un renversement commencerait à se produire. Les équilibres stables dont il s'agit, exprimés par des formules simples dans le cas d'un massif terminé supérieure-

ment à un talus plan, sont mis par l'auteur en regard de ceux que pourraient présenter des masses solides de même forme ; etc. La principale utilité de leur étude est de montrer que, du moins à une certaine distance d'un mur de soutènement (c'est-à-dire là où le massif doit se comporter à peu près comme s'il était latéralement indéfini), les déformations ont la même grandeur en tous les points, de sorte que tous ces points deviendront *dangereux à la fois* si l'épaisseur du mur diminue peu à peu jusqu'à compromettre la stabilité : ce qui confirme l'hypothèse fondamentale d'après laquelle l'état ébouleux s'établit presque simultanément dans tout le massif (en n'épargnant. *tout au plus*, qu'une région restreinte protégée par le frottement du mur), hypothèse que M. Levy a cru pouvoir admettre sans la discuter, mais qui n'est pas évidente, et que Rankine, sentant le besoin de la justifier, n'avait su étayer que sur un principe obscur, très contestable, de moindre résistance, attribué à Moseley.

M. Boussinesq essaie encore de donner une théorie générale des états *ébouleux* et *plastique*, que peuvent présenter respectivement les masses inconsistantes et les corps ductiles, en regardant ces états comme des cas extrêmes de l'état élastique ordinaire de la matière ; et il explique, au moyen des formules ainsi déduites, la constance de la vitesse d'écoulement du sable par un orifice hors d'un vase beaucoup plus large que l'orifice, quelle que soit la hauteur de charge, supposée toutefois notablement supérieure aux dimensions de l'orifice.

Bornons-nous ici à reproduire les conclusions du Rapport lu, sur ce travail, par M. de Tilly, à l'Académie Royale de Belgique : « Ce mémoire renferme l'exposition des principes et des résultats les plus immédiats d'une branche nouvelle et féconde de la mécanique moléculaire ou interne. On avait réussi à représenter par des équations aux dérivées partielles l'équilibre d'élasticité des solides, ainsi que celui des fluides, et l'on avait même pu, dans les cas les plus simples, intégrer ces équations. Il restait à traiter le même problème pour les massifs pulvérulents ou sablonneux, intermédiaires entre les solides et les fluides, et plus difficiles à étudier, à cause même de ce caractère mixte. C'est ce qu'a fait M. Boussinesq. Il a, de plus, en rattachant la théorie de l'équilibre-limite à celle de l'équilibre d'élasticité, éclairé d'un jour nouveau les rapports qui existent entre l'état élastique ou ordinaire de la matière et cet état extrême qu'elle affecte parfois, et qu'on appelle *état plastique*, pour les solides, *état ébouleux*, pour les masses inconsistantes. Enfin, il a donné les lois de l'équilibre-limite des terres, dans des cas beaucoup plus généraux qu'on ne l'avait fait jusqu'ici.... »

44. — *Etude, en coordonnées polaires, de l'équilibre-limite (par déformations planes) d'une masse plastique ou pulvérulente comprimée. — Application à une masse annulaire, à un massif compris entre deux plans rigides qui se coupent.*

Ce travail, quoique très-distinct par son objet du mémoire précédent, a été imprimé dans le même tome de l'Académie de Belgique, à la suite de ce mémoire, dont il est devenu le § X (p. 134 à 156). Il a pour but la théorie de l'équilibre-limite, dans des cas où le corps déformé supporte, suivant des sens divers, de fortes pressions, en comparaison desquelles son poids est négligeable. L'auteur y arrive à des résultats simples, soit quand les déformations sont symétriques tout autour d'un axe, soit quand elles sont pareillement orientées aux divers points de chaque droite émanée de l'origine, mais diversement d'une droite à l'autre. Il y établit, par exemple, et très-facilement, en tant que formules approximatives, les relations simples, si remarquables, par lesquelles M. Tresca a pu, dans ses expériences sur l'écoulement et le poinçonnage des blocs ductiles, représenter les pressions en jeu et les hauteurs des débouchures obtenues.

45. — *Sur une manière simple de déterminer expérimentalement la résistance au glissemeut maximum, dans un solide ductile, homogène et isotrope.*

(Comptes-Rendus, 29 juillet 1872 ; t. LXXV, p. 254.)

Ce procédé consiste à étirer lentement une barre homogène de la matière considérée, et à diviser la traction employée à cet effet par le double de la section minima de la barre, section mesurée, soit au moment où des allongements persistants commencent à se produire, soit même plus tard et jusqu'à la rupture.

46. — *Sur la méthode de Macquorn-Rankine, pour le calcul des poussées qu'exerce, à l'état ébouleux, un massif pesant sans cohésion, limité supérieurement par une surface à profil courbe indéfini.*

(Annales des Ponts-et-Chaussées, septembre 1874 ; t. VIII, p. 169 à 187 ; et Essai théorique sur l'équilibre des massifs pulvérulents, etc., p. 157 à 173.)

L'auteur expose cette méthode ingénieuse, à coordonnées mixtes (l'une rectiligne, l'autre courbe), ainsi que l'emploi qu'en a fait l'illustre savant écossais en remplaçant une des équations du problème par une autre plus simple, mais purement hypothétique, qui rend l'intégration possible. Après avoir montré le sens concret des résultats trouvés par Rankine, il fait voir comment un procédé graphique d'intégration, que Rankine n'applique qu'à ses formules hypothétiques, pourrait tout aussi bien servir à intégrer les équations véritables de l'équilibre-limite et même, parfois, s'étendre à des cas où le massif serait, non plus indéfini, mais soutenu d'un côté par un mur et, d'ailleurs, terminé en haut par une surface courbe *quelconque*, cas inabordable jusqu'à présent aux méthodes analytiques.

47. — *Lois géométriques de la distribution des pressions dans un solide homogène et ductile, soumis à des déformations planes.*

(Comptes-Rendus, 22 janvier 1872, t. LXXIV, p. 242.)

M. Boussinesq, adoptant pour coordonnées les deux paramètres caractéristiques des deux familles de lignes *isostatiques* (ou plutôt *orthostatiques*) produites dans le plan des déformations, exprime de suite, sous forme finie, les pressions en fonction de la dérivée de chacun de ces paramètres le long d'un chemin normal à la courbe correspondante; et, en appelant $h$, $h_1$ les deux dérivées ainsi définies, il montre que les lignes isostatiques ont pour équation $hh_1 = 1$, ce qui signifie qu'elles découpent le plan en rectangles élémentaires équivalents. Il démontre d'ailleurs, d'une manière purement géométrique, le beau théorème de Lamé sur les surfaces orthostatiques, applicable à l'équilibre de masses quelconques dans tous les cas où ces surfaces existent.

48. — *Equation aux dérivées partielles des vitesses, dans un solide homogène et ductile déformé parallèlement à un plan.*

(Comptes-Rendus, 12 février 1872; t. LXXIV, p 450.)

Quoique les vitesses des molécules d'un milieu à l'état ébouleux ou plastique doivent être, en général, plus facilement calculables pour les déformations planes que pour les autres, vu qu'on peut alors évaluer séparément les pressions et ne s'occuper qu'ensuite des mouvements, cependant, les

équations aux dérivées partielles qui les régissent sont assez complexes en coordonnées rectilignes. M. Boussinesq montre que l'introduction des coordonnées courbes définies par les lignes isostatiques les ramène à une seule équation linéaire, admettant (pour un corps plastique) la forme de celle des cordes vibrantes, mais avec un coefficient variable. Il trouve aussi que les lignes isostatiques, dans un massif sans pesanteur à l'état ébouleux, ont l'équation différentielle $h^{1-\sin\varphi} h_1^{1+\sin\varphi} = 1$, où $\varphi$ désigne l'angle de frottement.

49. — *Sur l'intégration de l'équation aux dérivées partielles des cylindres isostatiques, dans un solide homogène et ductile.*

(Comptes-Rendus, 29 janvier 1872 ; t. LXXIV, p. 318.)

50. — *Intégration de l'équation aux dérivées partielles des cylindres isostatiques, produits à l'intérieur d'un massif ébouleux soumis à de fortes pressions.*

(Comptes-Rendus, 22 septembre 1873 ; t. LXXVII, p. 667.)

51. — *Sur la distribution plane des pressions à l'intérieur des corps isotropes dans l'état d'équilibre-limite.*

(Comptes-Rendus, 16 mars 1874; t. LXXVIII, p. 757.)

52. — *Intégration des équations aux dérivées partielles de cet équilibre-limite.*

(Comptes-Rendus, 23 mars 1874; t. LXXVIII, p. 786.)

53. — *Sur les modes d'équilibre-limite les plus simples que peut présenter un massif sans cohésion fortement comprimé.*

(Comptes-Rendus, 1er mars 1875; t. LXXX, p. 546.)

54. — *Application de ces modes d'équilibre-limite à l'état ébouleux d'une masse pulvérulente, serrée entre deux plans solides qui se coupent.*

(Comptes-Rendus, 15 mars 1875 ; t. LXXX, p. 623.)

Ces articles ont pour objet le calcul général des pressions, dans une masse en équilibre-limite éprouvant des déformations planes. Vu l'équation caractéristique et donnée de cet équilibre, l'état mécanique, en chaque point, est parfaitement défini, quant à sa nature, par la *pression moyenne* (valenr moyenne de trois pressions principales exercées sur ce point), et, quant à son orientation, par la direction de la plus petite des pressions principales. L'auteur montre que les équations indéfinies du problème sont intégrables, en séries de termes très-simples ayant la forme exponentielle ou trigonométrique, lorsqu'on prend pour fonctions inconnues les deux coordonnées $x$, $y$ de chaque point du corps, et pour variables indépendantes deux quantités, caractérisant son état mécanique, et qui sont, l'une, l'angle que la pression principale la plus petite fait avec une direction fixe, l'autre, une certaine fonction de la pression moyenne exercée au même endroit. En d'autres termes, il faut, pour intégrer, renverser la question et se demander, non pas quel est l'état produit en chaque point, mais quel est le point où se produit un état déterminé.

## IV. — Théorie des phénomènes ondulatoires, et optique.

### 55. — *Théorie des ondes liquides périodiques.*

(Comptes-Rendus, 19 avril 1869 ; t. LXVIII, p. 905, et Recueil des Savants étrangers de l'Académie des Sciences de Paris, t. XX, p. 509 à 615. — Voir le Rapport approbatif de M. de Saint-Venant aux Comptes-Rendus, 21 février 1870 ; t. LXX, p. 360.)

Ce mémoire concerne l'étude des petits mouvements, à composantes pendulaires, qui se propagent à la surface libre et dans la masse d'un liquide pesant en équilibre, quand une certaine partie en est directement ébranlée par des oscillations périodiques et concordantes d'un système de corps immergés: il est donc consacré au phénomène qui a fourni le type de tous les mouvements ondulatoires. L'auteur démontre : 1° qu'à une certaine distance de la région d'ébranlement, les surfaces d'ondes (ou surfaces sur toute l'étendue desquelles la phase des mouvements est à chaque instant la même) sont des cylindres verticaux ; 2° que les ondes progressent, de l'une de ces surfaces aux suivantes, avec une *célérité* ou vitesse de propagation constante, à part de petites variations, très sensiblement proportionnelles à l'inverse du carré de la distance au centre de courbure de la partie considérée des

ondes ; 3° que, si l'on fait abstraction de ces variations légères, la vitesse de propagation dont il s'agit est celle d'une houle plane de même période, et que les mouvements se font aussi comme dans une telle houle, à cela près que leur amplitude varie arbitrairement, avec continuité, d'un point à l'autre d'une même surface d'onde, mais en raison inverse de la racine carrée du rayon de courbure des ondes, le long de toute droite qui leur est perpendiculaire.

Il trouve aussi que ces ondes, lorsqu'on en intercepte une partie en immergeant un obstacle dans l'eau, présentent, au-delà de l'obstacle, des franges de diffraction, analogues à celles que produit la lumière et qu'il prouve être calculables par une méthode pareille, mais qui sont beaucoup plus grandes et, partant, plus accessibles dans tous leurs détails. Il étudie, non-seulement les circonstances qui s'y rapportent à l'amplitude des mouvements, mais, de plus, celles de la phase, dont les physiciens ne se sont pas encore occupés à propos de la diffraction des ondes lumineuses. Il trouve, par exemple, que de grands retards se produisent dans la région abritée par l'obstacle : les ondes, en y pénétrant, s'infléchissent de plus en plus vers l'arrière à mesure que leur amplitude décroit et devient insensible, c'est-à-dire à mesure qu'on s'éloigne du bord de cette région pour s'avancer dans son intérieur.

L'auteur reconnaît encore que la vitesse de propagation grandit quand la période de vibration augmente, et que ses variations suivent une loi assez analogue à celle qui régit la dispersion de la lumière, du moins dans les petites profondeurs, où elles se trouvent aussi restreintes que le sont les différences relatives existant entre les vitesses des lumières simples diversement colorées ; etc.

56. — *Mémoire sur les ondes dans les milieux isotropes déformés.*

(Journal de Mathématiques de 1868 ; t. XIII, p. 209 à 241.)

L'auteur étudie ces milieux solides, supposés indéfinis, en vue de chercher les analogies qu'ils peuvent présenter avec l'éther des cristaux biréfringents, quant à la manière dont les vibrations s'y propagent et s'y polarisent. Il détermine, pour les points éloignés d'un centre d'ébranlements périodiques, la forme des ondes qui émanent de ce centre et les circonstances que présente la direction des mouvements. La surface de l'onde qui correspond aux vibrations quasi-transversales se compose de deux nappes, se raccordant aux

extrémités de deux certaines droites (*axes optiques*) situées dans le plan des deux axes d'élasticité extrêmes et symétriquement de part et d'autre de chacun de ceux-ci. Elle prend la forme de l'onde que Fresnel a trouvée pour l'éther lumineux (supposé agir comme une sorte de solide élastique), dans deux cas remarquables, découverts par Cauchy. Le premier cas, où les vibrations se font suivant des sens perpendiculaires à ceux que Fresnel leur attribue dans la double réfraction, c'est-à-dire perpendiculaires aux projections des rayons sur les plans tangents à l'onde, se réalise pourvu que le milieu isotrope, déformé d'une manière persistante, *soit redevenu libre*, ou ait été soustrait définitivement aux pressions déformatrices. Le second cas, où les vibrations quasi-transversales se trouvent dirigées sensiblement comme le sont, d'après Fresnel, celles de l'éther lumineux dans les cristaux biréfringents, exige, au contraire, pour se produire, que les pressions déformatrices *continuent à s'exercer*, et qu'elles vérifient même certaines relations très spéciales où entrent les coefficients d'élasticité acquis par le milieu; etc.

57. — *Etude sur les vibrations rectilignes et sur la diffraction, dans les milieux isotropes et dans l'éther des cristaux.*

(Comptes-Rendus, 21 octobre 1867; t. LXV, p. 672. et Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1868; t. XIII, p. 340 à 371.)

Ce mémoire a pour objet l'étude des variations que peut éprouver d'un point à l'autre, dans les milieux homogènes élastiques les plus importants, l'amplitude des petits mouvements pendulaires rectilignes les plus généraux possibles, de même période, mais de phases et de directions différentes. Les intégrations s'y font d'une manière en quelque sorte géométrique, pourvu que les longueurs d'ondulation soient très petites par rapport aux dimensions des surfaces d'onde, et elles conduisent, tant pour les vibrations longitudinales que pour les vibrations transversales, à des lois simples, qu'il serait trop long de rappeler ici.

Le résultat principal de ce travail est de démontrer, par les équations théoriques des petits mouvements, la légitimité du procédé dont on se sert pour les calculs relatifs aux phénomènes de diffraction et pour délimiter latéralement les rayons lumineux, procédé qui consiste à remplacer toute onde *excitatrice* par une infinité d'autres ondes, décrites autour de ses divers points comme centre et chez lesquelles l'amplitude n'aurait de valeurs sen-

sibles que sur les rayons voisins de la normale à l'onde excitatrice. M. Boussinesq prouve toutefois : 1° qu'il faut prendre les centres de ces ondes auxiliaires, non pas sur l'onde excitatrice, mais sur une surface parallèle, située en arrière, à une petite distance contenant un certain nombre de longueurs d'ondulation ; 2° que, de plus, chacun de ces systèmes d'ondes doit apporter, sur le point le premier atteint de l'onde excitatrice, des mouvements en avance d'un quart de période sur ceux qui s'y produisent en effet ; 3° enfin, que, dans l'hypothèse de vibrations parfaitement rectilignes, ces ondes élémentaires ne seraient pas possibles si l'amplitude n'y avait de valeurs appréciables que sur une calotte sphérique très petite, c'est-à-dire si elles ne s'étendaient pas à toute une zone (équatoriale par exemple), dont la largeur peut, il est vrai, être fort restreinte. Malgré ces différences, rien n'est changé aux résultats de la théorie ordinaire, sauf la suppression, jugée d'ailleurs nécessaire par les physiciens, d'un quart de période aux formules des phases. Cette méthode, et les conséquences qu'on en déduit, s'étendent sans erreur sensible aux milieux légèrement biréfringents, comme sont tous les cristaux connus.

L'auteur a reconnu depuis que les vibrations émanées d'un centre d'ébranlements ne se font pas, en général, suivant des trajectoires complètement droites, et qu'il leur suffit de présenter d'insignifiants écarts d'avec la forme rectiligne, pour que leur amplitude puisse varier arbitrairement d'un point à un autre d'une même surface d'onde, tout en restant astreinte à être, le long de chaque rayon, en raison inverse de la distance au centre. Donc, rien n'empêche de prendre pour ondes élémentaires des ondes où les vibrations ne soient que sensiblement rectilignes et où, comme le supposait Fresnel, l'amplitude n'ait des valeurs sensibles que sur les rayons faisant de très petits angles avec la normale à l'onde excitatrice. Cette remarque concerne, d'ailleurs, non seulement les ondes lumineuses à vibrations transversales ou quasi-transversales, mais aussi les ondes sonores, à vibrations longitudinales.

58. — *Essai sur la théorie de la lumière.*

(Comptes-Rendus, 3 juillet 1865 ; t. LXI, p. 19.)

59. — *Théorie nouvelle des ondes lumineuses.*

(Comptes-Rendus, 5 août 1867 ; t. LXV, p. 235 ; et Journal de Mathématiques de 1868, t. XIII, p. 313 à 339.)

60. — *Exposition synthétique des principes de la théorie nouvelle des ondes lumineuses.*

(Journal de Mathématiques, 1873 ; t. XVIII, p. 361 à 383; et Annales de chimie et de physique, décembre 1873; t. XXX, p. 589 à 565.)

Exposons rapidement les principes de cette théorie, la plus simple de toutes celles qui ont été proposées et la seule, au dire de juges éminents, qui rende compte de l'ensemble des phénomènes optiques.

L'idée naturelle que nous nous formons de l'éther lumineux est celle d'un fluide dans un état de raréfaction et de division extrêmes, qui se comporterait, par rapport à chaque molécule des corps pondérables, comme font l'eau ou l'air à l'égard des solides de dimensions perceptibles qui y sont plongés ; fluide dont la densité serait en quelque sorte nulle, soit en comparaison de la densité apparente de la matière pondérable, soit surtout en comparaison de la densité réelle des molécules ou groupes atomiques qui la constituent. En effet, les géomètres ont été conduits, comme on sait, à penser que les molécules chimiques dont se compose un corps laissent entre elles des espaces beaucoup plus grands que ceux qu'elles occupent : ce qui réduit d'autant la densité des corps par rapport à celle de leurs molécules prises à part. L'éther doit donc circuler, entre de pareilles molécules, aussi librement que l'air à travers un filet à mailles larges, et en y conservant, comme lui, la même élasticité et la même densité générale que si ces molécules pondérables n'y étaient pas plongées. Pour s'expliquer une telle constitution, il suffit de composer l'éther d'atomes disséminés, ou non groupés en molécules compactes comme celles des corps palpables, et d'admettre, par suite, que les forces qui règnent dans cette poussière d'atomes ne conservent une certaine intensité qu'à des distances au plus comparables aux dimensions d'une molécule chimique et presque nulles en comparaison de la distance ordinaire de deux molécules : telles doivent être, du reste, les actions mêmes qui tiennent groupés ensemble, dans chaque molécule pondérable, les divers atomes qui la composent. De telles forces pourront bien donner à l'éther une élasticité relativement très grande, mais ne subsistant que pour des vibrations et des déformations d'amplitudes excessivement petites, au-delà desquelles les limites de cette élasticité se trouveront, comme on dit, *dépassées* ; en sorte que le milieu, soit par son élasticité, soit par son inertie, ne résistera pas beaucoup plus que le vide parfait au mouvement des corps qui le traverseront.

Supposons actuellement que d'imperceptibles mouvements vibratoires, excités du dehors, viennent à se propager au sein d'un pareil éther, ainsi entrecoupé çà et là de molécules pondérables. Celles-ci prendront inévitablement, et à l'instant même, une fraction finie de la quantité de mouvement transmise, sans que, pour cela, leurs déplacements aient besoin d'être, à beaucoup près, comparables à ceux de l'éther. L'auteur prouve aisément que, sauf dans le cas où ces impulsions s'accumulent de manière à produire *l'échauffement* (qui ne fait pas le sujet de l'examen actuel), les actions élastiques propres du corps, développées par les très-faibles déformations ainsi imprimées à l'assemblage des molécules pondérables, sont complétement négligeables devant celles de l'éther mises en jeu par ses déformations simultanées bien plus grandes. On peut donc, en optique, supposer chaque molécule pondérable isolée dans l'éther, comme si les autres n'existaient pas, et soumise uniquement aux impulsions du fluide contigu.

Dans des conditions pareilles, l'état de la molécule deviendra rapidement périodique, comme l'est celui de l'éther lui-même, et il sera dès lors une fonction déterminée de celui-ci. Comme, de plus, les dimensions d'une molécule, ou même celles d'un élément de volume qui en contient plusieurs, et aussi les excursions lumineuses de chaque espèce de matière, sont petites en comparaison d'une longueur d'onde, les déplacements vibratoires $u$, $v$, $w$ (suivant trois axes rectangulaires) de *tout* l'éther qui entoure aux *divers* instants un groupe de molécules pondérables, se trouveront les mêmes, à une première approximation, pour *tout* cet éther.

Par suite, à ce degré d'approximation, et vu la petitesse excessive des variables (qui permet en général de donner aux fonctions la forme linéaire), les déplacements analogues, $u_1$, $v_1$, $w_1$, des molécules pondérables comporteront des expressions du premier degré, en $u$, $v$, $w$, telles que

$$u_1 = Au + A'v + A''w,\ v_1 = Bv + B'w + B''u,\ w_1 = Cw + C'u + C''v,$$

$A, A', A'', B, \ldots C''$ désignant des coefficients très-petits qui dépendent, pour chaque molécule, de sa masse, de sa figure et de ses dimensions. Les moyennes des composantes pareilles à l'intérieur d'un élément de volume, ou ce qu'on peut appeler les *déplacements moyens* de la matière pondérable, auront évidemment la même forme ; en sorte que, si ce sont ceux-là que représentent les formules ci-dessus, et si $\rho$ désigne la densité de l'éther, $\rho_1$ celle du corps, les inerties, changées de signe, de toute la matière comprise dans l'élément vaudront, suivant les trois axes et par unité de volume,

$$\rho \frac{d^2u}{dt^2} + \rho_1 \left( A \frac{d^2u}{dt^2} + A' \frac{d^2v}{dt^2} + A'' \frac{d^2w}{dt^2} \right), \text{ etc.}$$

Et l'on aura les équations indéfinies du mouvement vibratoire, en égalant ces expressions aux composantes totales des forces élastiques de l'éther, composantes qui sont, avec les notations de Lamé, familières à tous les géomètres,

$$(\lambda + \mu) \frac{d\theta}{dx} + \mu \Delta_2 u, \text{ etc.}$$

En effet, chaque molécule pondérable, n'étant soumise qu'aux impulsions de l'éther ambiant, *alourdit* celui-ci de toute la valeur de son inertie propre, sans modifier d'ailleurs son ressort; d'où il suit bien que les équations du mouvement se forment comme dans le problème d'une corde élastique vibrante, autour de laquelle est enroulé un fil massif, non tendu, entraîné avec elle. Seulement, les excursions de la matière pondérable ne sont ici qu'une fraction infiniment petite de celles de l'éther, fraction qui peut même varier, dans les divers sens, suivant la forme des molécules ou groupes atomiques et leur facilité correspondante à se laisser mouvoir.

Quand le corps est isotrope, c'est-à-dire pareillement constitué dans toutes les directions, sa matière se déplace, par raison de symétrie, suivant le même sens que l'éther vibrant, et les expressions des déplacements moyens des molécules se réduisent à $Au$, $Av$, $Aw$. Les mouvements se font donc comme s'il n'y avait point de matière pondérable, mais que la densité de l'éther eût été portée de $\rho$ à $\rho + \rho_1 A$. Ainsi s'explique l'hypothèse de Fresnel, devenue classique, qui attribue à l'éther d'un corps la même élasticité qu'à l'éther libre, mais une densité plus grande : opinion qu'il convient d'abandonner et qui n'était qu'une manière de tenir compte de la participation de la matière pondérable au mouvement.

Après les milieux isotropes, viennent ceux qui admettent en chaque point trois plans rectangulaires de symétrie de contexture, dans chacun desquels la matière pondérable exécutera ses vibrations quand celles de l'éther y seront elles-mêmes contenues. Alors, $u_1$, $v_1$, $w_1$ devant s'annuler respectivement dès que $u$, ou $v$, ou $w$ s'annulent, leurs expressions se réduisent à $Au$, $Bv$, $Cw$. Par suite, l'éther se comporte comme si, étant seul, il avait les trois densités $\rho + \rho_1 A$, $\rho + \rho_1 B$, $\rho + \rho_1 C$, pour les mouvements effectués respectivement dans les sens des trois axes. Ces différences, provenant de ce que les molécules

auront des formes qui donneront plus de prise à leur entraînement par l'éther suivant tel sens que suivant tel autre, sont justement tout ce qu'il faut, et rien que ce qu'il faut, pour qu'une analyse simple, dans le cas des degrés assez faibles de biréfringence que présente la nature, conduise à l'onde de Fresnel, avec des vibrations dirigées comme le voulait Fresnel, à cela près, qu'au lieu d'être rigoureusement transversales, elles sont quasi-transversales comme le préfèrent les physiciens.

A une approximation plus élevée, il faut tenir compte de ce que la longueur d'onde peut n'être pas excessivement grande par rapport aux dimensions des molécules des corps, surtout des molécules intégrantes des solides, et encore moins par rapport aux arêtes d'un parallélipipède élémentaire, employé pour obtenir les équations du mouvement, et qui doit contenir un certain nombre de molécules pour qu'on n'ait à introduire, dans les formules, que les déplacements moyens ou normaux de la matière pondérable existant en chaque endroit. Donc, tous les atomes d'éther qui entourent et meuvent un pareil ensemble de molécules ne doivent pas être censés exactement à une même phase de leur vibration. Alors, pour définir l'état actuel de l'éther dans *tout* le champ considéré, beaucoup plus grand peut-être que l'amplitude des oscillations mêmes, il faut se donner, non seulement les valeurs des petits déplacements $u$, $v$, $w$ en un point du champ, mais aussi, au même point, leurs dérivées partielles successives (également très petites) par rapport aux coordonnées d'équilibre $x$, $y$, $z$. Les déplacements, $u_1$, $v_1$, $w_1$, des molécules, fonctions de l'état considéré, auront donc, en outre de leurs termes principaux en $u$, $v$, $w$ trouvés tout-à-l'heure, d'autres termes, contenant linéairement ces dérivées

$$\frac{d\,(u,\,v,\,w)}{d\,(x,\,y,\,z)},\quad \frac{d^2\,(u,\,v,\,w)}{d\,(x,\,y,\,z)\,d\,(x,\,y,\,z)},\ \text{etc.}$$

Des considérations d'isotropie permettront d'ailleurs de simplifier notablement ceux-ci ; car tous les corps transparents connus sont assez peu hétérotropes, pour que des termes d'une influence déjà minime puissent se calculer comme si la constitution de la matière y était la même par rapport à toutes les positions possibles d'un système d'axes rectangles qui tourne arbitrairement autour de l'origine. Or, ces termes, par les petits changements qu'ils introduisent dans l'expression de l'inertie de la matière pondérable suivant chaque axe, donnent, le plus simplement possible, l'explication de la

dispersion et de la polarisation rotatoire, avec leurs lois expérimentales reconnues.

L'auteur des mémoires analysés se dispense donc de recourir à la considération d'équations aux derivées partielles, *linéaires mais à coefficients périodiques* en $x$, $y$, $z$, sur lesquelles d'autres essais de théorie ont fondé leurs explications des phénomènes de dispersion et de polarisation rotatoire, l'un d'eux même celle de la double réfraction. Il évite par conséquent, lui seul, d'employer la méthode hardie, impliquant des hypothèses non justifiées, par laquelle Cauchy a tenté d'intégrer ces équations, méthode qui, au moins dans ses applications effectives avec développements en série, paraît conduire à des résultats contradictoires, suivant qu'un coefficient périodique, la densité $\rho$, y affecte les seconds membres des équations (où sont les dérivées $\frac{d^2 u}{dt^2}, \frac{d^2 v}{dt^2}, \frac{d^2 w}{dt^2}\Big)$, ou suivant que c'est son inverse $\frac{1}{\rho}$ (développable en série au même titre, mais pas plus, que le coefficient lui-même) qui affecte le premier membre. M. Boussinesq avait reconnu, dès 1869, cette difficulté grave, que M. de Saint-Venant a signalée aux physiciens géomètres dans son mémoire *Sur les différentes manières de présenter la théorie des ondes lumineuses*, publié en 1872 aux *Annales de chimie et de physique* ($4^{me}$ série, t. xxv).

Après l'étude des phénomènes produits à l'intérieur des milieux homogènes transparents vient celle, non moins importante, des faits qui se passent à la surface de séparation de deux milieux. Il faut absolument pour les expliquer, comme l'a montré Cauchy, poser des *conditions de continuité* exprimant que, de part et d'autre de la surface, les déplacements $u$, $v$, $w$ de l'éther, ainsi que leurs dérivées premières, $\frac{d(u, v, w)}{dz}$, suivant le sens normal, ont mêmes valeurs. Or, ces conditions sont évidemment satisfaites dans le système de M. Boussinesq. Car, d'abord, l'éther formant un milieu continu, dont les corps ne changent sensiblement ni l'élasticité, ni la densité, les déplacements $u, v, w$ y varient graduellement partout. En outre, si l'on considère un mince feuillet matériel, pris à la surface de séparation avec ses deux faces respectivement dans l'un et l'autre milieu, et d'une épaisseur très-inférieure à une longueur d'onde (quoique comprenant toutes les *couches de transition*), l'équilibre dynamique de ce feuillet exige que les pressions élastiques exercées de part et d'autre soient égales, comme il arrive, du reste, dans toutes les questions analogues où il y a des pressions à considérer. Or, vu la constance de l'élasticité

de l'éther et la continuité de $u$, $v$, $w$ de part et d'autre sur toute la surface, cette égalité revient précisément à celle des dérivées de $u$, $v$, $w$ suivant la normale, dans les deux milieux.

61. — *Sur les lois qui régissent, à une première approximation (c'est-à-dire abstraction faite des pouvoirs dispersif et rotatoire), les ondes lumineuses propagées dans un corps homogène et transparent d'une contexture quelconque.*

(Journal de Mathématiques, 1872; t. XVII, p. 165 à 174.)

Cette question, à peu près inabordable dans toute autre théorie par suite de la complication qu'elle y présenterait, ne conduit qu'à des calculs assez simples dans celle de M. Boussinesq, à cause de son hypothèse fondamentale d'une élasticité et d'une densité de l'éther constantes. Il y démontre : 1° que la surface de l'onde, chez tout corps transparent, n'a jamais plus de deux axes optiques, et que les rayons lumineux compris dans le plan de ces axes ou, sensiblement, dans une zone de quelques degrés de part et d'autre, sont régis par les lois de Fresnel; 2° que, pour les cristaux des cinq premiers systèmes, où il y a un axe minéralogique normal au plan des autres et où une rotation, autour de cet axe principal, de 180° au plus, amène le cristal dans une position analogue à la première, le corps se comporte comme s'il admettait trois plans rectangulaires de symétrie de contexture, ce qui conduit aux lois de double réfraction connues; 3° que, dans le cas le plus général possible (mais avec faible biréfringence), il y a un *ellipsoïde d'élasticité*, dont chaque demi-diamètre donne, par son inverse, la vitesse de propagation des vibrations ayant sa direction. Seulement, les deux systèmes possibles de vibrations, pour l'onde plane qui coupe l'ellipsoïde suivant une ellipse quelconque, ne sont plus rectangulaires, ni orientés suivant les axes de l'ellipse; mais leurs directions se trouvent, toutes les deux, également inclinées sur ces axes respectifs, d'un angle qui, nul pour les ondes ayant leur normale dans le plan des deux axes extrêmes de l'ellipsoïde, grandit, jusqu'à une limite plus ou moins grande (d'après la constitution du milieu), à mesure que cette normale se rapproche de l'axe moyen; etc.

62.—*Addition au mémoire intitulé « Théorie nouvelle des ondes lumineuses ».*

(Journal de Mathématiques, 1868; t. XIII; p. 425 à 438.)

63. — *Sur la vitesse de la lumière dans les corps en mouvement.*

(Comptes-Rendus, 24 juin 1872; t. LXXIV, p. 1573, et Journal de Mathématiques, 1873; t. XVIII, p. 383.)

64. — *Sur le calcul des phénomènes lumineux produits à l'intérieur des milieux transparents qu'anime une translation rapide, dans le cas où l'observateur participe lui-même à cette translation.*

(Comptes-Rendus, 26 mai 1873; t. LXXVI, p. 1293, et Journal de Mathématiques, 1878; t. XVIII, p. 387.)

Ces recherches sont consacrées à trois questions qu'on n'avait pu traiter dans aucune autre théorie de la lumière.

La première a pour objet le calcul de la puissance réfractive et du pouvoir rotatoire des mélanges transparents (les dissolutions salines ou les mélanges gazeux, par exemple). Chaque molécule pondérable étant regardée comme indépendante des autres dans le mode d'explication analysé, les inerties des diverses molécules comprises dans un élément de volume s'ajoutent simplement, et l'on trouve de suite, conformément à l'expérience, que la puissance réfractive et le pouvoir rotatoire des mélanges s'obtiennent par l'addition des quantités pareilles relatives aux composants, lesquelles sont elles-mêmes proportionnelles aux densités de ceux-ci dans le mélange. Toutefois, on fait abstraction du pouvoir dispersif, et l'on suppose qu'il s'agisse de simples mélanges, non de combinaisons chimiques altérant la constitution des molécules.

La deuxième question, d'une grande importance, est l'étude des ondes lumineuses *dans un corps animé d'une translation rapide.* L'auteur, admettant que l'éther peut circuler librement entre les molécules du corps comme à travers un filet à larges mailles, suppose qu'il n'est pas entraîné d'une manière appréciable, c'est-à-dire avec une vitesse comparable à celle du corps lui-même. Mais, à la translation des molécules se superpose, par le fait de la lumière ou des impulsions périodiques et alternatives qui les atteignent, l'imperceptible mouvement vibratoire que l'éther contigu leur communiquerait si elles étaient en repos, mouvement à l'unisson de l'éther et représenté

par les déplacements $u_1$, $v_1$, $w_1$, déjà exprimés plus haut en fonction de ceux, $u$, $v$, $w$, de l'éther. La vitesse *vibratoire* et l'accélération *vibratoire* d'une molécule pondérable s'obtiendront toujours en substituant, dans ces expressions qui sont linéaires, à $u$, $v$, $w$ leur dérivées premières et secondes par rapport au temps : seulement, *comme ici la molécule atteint successivement un éther toujours nouveau, et que c'est en accord avec cet éther qu'elle vibre*, les dérivées de $u$, $v$, $w$ dont il s'agit s'évalueront, dans ces formules de $u_1$, $v_1$, $w_1$, en faisant croître à la fois $t$ de $dt$ et $x$, $y$, $z$ des produits respectifs de $dt$ par les trois composantes de la vitesse translatoire donnée, qu'on peut supposer constante pendant toute la durée du passage d'une onde lumineuse à côté de la molécule. De là, des expressions des inerties vibratoires de la matière pondérable un peu moins simples que celles qu'on aurait si le corps était en repos, et qu'on trouve pouvoir se déduire de celles-ci en concevant la densité du corps multipliée fictivement par le carré $\left(1-\frac{\mathrm{v}}{\omega}\right)^2$, où v désigne la composante de sa vitesse de translation suivant la normale aux ondes et $\omega$ la vitesse de propagation. L'on obtient enfin, pour calculer cette dernière, c'est-à-dire pour calculer la vitesse effective de la lumière dans l'éther que traverse le corps, une expression, s'accordant, non-seulement avec la célèbre formule approchée, que Fresnel tira par induction d'une expérience d'Arago et que de belles observations de M. Fizeau ont confirmée, mais, même, avec une légère correction, relative aux pouvoirs dispersifs, que de délicates expériences de M. Mascart ont fait introduire dans cette formule (postérieurement à l'époque où M. Boussinesq avait publié tous les principes de cette analyse), correction consistant à exprimer que la vitesse de la lumière dépend à fort peu près, non pas de la période réelle des vibrations lumineuses, mais de leur période apparente pour un observateur entraîné par le corps.

La troisième question concerne la polarisation rotatoire spéciale que présente un corps transparent, naturellement isotrope-symétrique, quand on le place entre les deux pôles d'un aimant. L'auteur y arrive, par une analyse simple, à toutes les lois expérimentales du phénomène ; mais il a besoin d'une nouvelle hypothèse, nécessaire et suffisante. Elle consiste à admettre que les expressions des déplacements $u_1$, $v_1$, $w_1$ de la matière pondérable, déjà fonctions de ceux, $u$, $v$, $w$, de l'éther, peuvent le devenir aussi des vitesses de ce dernier et acquérir, par conséquent, des termes linéaires, en $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$, que, d'ailleurs, le genre

d'isotropie (autour d'un axe) propre au champ magnétique réduit à un seul ou à n'avoir du moins qu'un seul coefficient. Il nous faudra probablement attendre d'avoir acquis une idée nette des phénomènes électriques et magnétiques, pour rechercher comment leur intervention expliquerait cette influence des vitesses vibratoires de l'éther.

## V. — Mécanique générale et thermodynamique.

65. — *Action réciproque de deux molécules, dans un solide isotrope un peu dérangé de son état primitif d'equilibre.*

(Comptes-Rendus, 1er juillet 1867 ; t. LXV, p. 44.)

66. — *Recherches sur les principes de la mécanique, sur la constitution moléculaire des corps et sur une nouvelle théorie des gaz parfaits.*

(Mémoires de l'Académie des Sciences et des Lettres de Montpellier, 1872, et Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1873, t. XVIII, p. 305 à 360.)

L'article et le mémoire cités se rattachent à cette catégorie de recherches, hors du domaine directement accessible à l'expérience, où n'ont pas craint de s'engager tous les géomètres-physiciens qui, de nos jours, se sont efforcés d'éclaircir les grandes questions de la thermodynamique, et même tous ceux qui ont essayé de se rendre géométriquement compte de faits physiques se dérobant dans leurs détails à nos observations, quoique perceptibles dans certains de leurs effets d'ensemble. L'auteur a tenté d'y expliquer mécaniquement les phénomènes fondamentaux de la solidité, de la fluidité, de l'état gazeux, ainsi que le passage de l'un de ces états à un autre et l'échauffement ou le refroidissement des corps. Il espère avoir rattaché ces phénomènes à des conceptions aussi simples que possible et toutes concordantes. Pour abréger, citons seulement, entre un grand nombre d'autres résultats :

1° La manière dont l'auteur déduit toutes les lois générales de la mécanique du principe des forces vives, combiné avec cet autre principe, que les divers points matériels d'un système isolé ont leurs accélérations parfaitement déterminées en fonction de leurs situations relatives actuelles ;

2° La distinction, qu'il croit avoir établie nettement le premier, entre le

travail total des actions moléculaires exercées, de l'extérieur, à travers un élément de la surface d'un corps, et le travail de la *pression* obtenue en composant ces forces comme si elles étaient appliquées au centre de gravité de l'élément plan. En effet, ce centre n'éprouvant que le déplacement *moyen* ou *perceptible* des points d'application véritables, le *travail de la pression* ne comprend que la partie des travaux des forces considérées qui correspond au mouvement visible ou d'ensemble; en sorte qu'il laisse de côté le travail des mêmes actions pour le mouvement calorifique superposé au mouvement apparent, travail connu des physiciens comme étant la *chaleur* entrée dans le corps par l'élément plan, et que les auteurs de thermodynamique ajoutent sans en donner la signification mécanique précise. M. Boussinesq remarque donc que les *pressions*, ou *résultantes dynamométriquement mesurables des forces moléculaires*, tout en étant très propres à représenter ces forces dans les calculs des quantités de mouvement et même des moments, ne le sont plus, dans les calculs de travail ou d'énergie, lorsqu'il faut tenir compte des échanges de chaleur : réflexion importante, sans laquelle il n'est pas possible de s'expliquer d'une manière précise le premier grand principe de la thermodynamique, qui est celui de l'équivalence de la chaleur et du travail.

67. — *Construction géométrique des pressions exercées en un point quelconque d'un corps.*

(Comptes-Rendus, 17 décembre 1876; t. LXXXIII, p. 1168.)

68. — *Sur la construction géométrique des pressions que supportent les divers éléments plans se croisant en un même point d'un corps et sur celle des déformations qui se produisent autour d'un tel point.*

(Journal de Mathématiques, 1877; t. III, p. 147 à 152.)

L'auteur, après avoir défalqué de toutes les pressions qui s'exercent en un même point d'un corps une composante normale égale à la demi-somme des deux pressions principales extrêmes, *ramène à une construction plane la représentation de toutes ces forces*, *pour laquelle l'ellipsoïde d'élasticité de Lamé exigeait l'emploi des trois dimensions;* et il peut alors, sans calcul, démontrer plusieurs résultats, touchant les plus grandes composantes tangentielles de pression, touchant les pressions les plus inclinées sur la

normale à l'élément plan qu'elles sollicitent, etc. Il applique une construction plane analogue à l'étude des dilatations et des glissements qu'éprouvent les diverses lignes matérielles se croisant en tout point d'un milieu, déformé d'une manière continue quelconque.

69. — *Sur la théorie du potentiel, et sur la différentiation des intégrales définies dans les cas où la fonction sous le signe somme devient infinie.*

(Comptes-rendus, 10 février 1879; t. LXXXVIII, p. 277.)

70. — *Sur la manière de présenter la théorie des potentiels d'attraction, dans l'hypothèse, généralement admise, de la discontinuité de la matière.*

(Journal de Mathématiques, 1880; t. VI, et Comptes-Rendus, 5 avril 1880, t. XC, p. 792.)

Ces articles ont été faits pour répondre à une forte objection, consistant en ce que la théorie classique du potentiel, édifiée, dans tous les cours de mécanique rationnelle, d'après l'hypothèse de la continuité de la matière, paraît n'avoir plus de sens, et ne plus correspondre à rien de réel, dès qu'on l'applique à l'intérieur de corps composés de molécules distinctes, comme le sont tous ceux de la nature suivant l'opinion unanime des hommes de science.

M. Boussinesq remarque que le but ordinaire de l'emploi des potentiels d'attraction est de servir au calcul de la pesanteur, c'est-à-dire des forces, agissant à des distances perceptibles, qui sont inversement proportionnelles aux carrés de ces distances, et non au calcul des actions moléculaires exercées aux distances imperceptibles, forces très-importantes aussi, mais qui ne suivent pas la loi de Newton. En conséquence, il appelle *potentiel* relatif à une masse donnée, pour un point $(x, y, z)$ de l'espace, la somme des éléments de cette masse respectivement divisés par leurs distances $r$ au point $(x, y, z)$, *étendue à tous les éléments qui sont en dehors d'une sphère décrite, autour de ce point* $(x, y, z)$ *comme centre, avec un rayon constant, beaucoup plus petit que les dimensions des corps, mais considérable par rapport à la distance de deux molécules voisines.* L'exclusion des termes à petit dénominateur $r$, relatifs aux éléments de masse très-voisins du point considéré, est, comme on sait, sans importance pour une matière continue : on pourrait, dans l'hypothèse de la continuité des corps, ajouter sans inconvénient tous ces

termes, quoiqu'ils ne correspondent (par leur dérivée) à aucune force réelle ; et c'est ce que font les auteurs de mécanique. Mais il n'en est plus de même dans la supposition d'une matière composée d'atomes disséminés ; car, alors, ces termes à petit dénominateur $r$, *énormément changeants pour d'imperceptibles déplacements du point* $(x, y, z)$, empêchent la somme de varier graduellement dans toute région finie occupée par la matière ; en sorte que le potentiel ne reste utilisable, pour l'étude du problème de la pesanteur, etc., et ne conserve son sens concret, qu'autant qu'on les exclut.

La différentiation d'un potentiel ainsi défini est d'ailleurs facile et naturelle. Le point $(x, y, z)$, en se déplaçant infiniment peu, emporte avec lui la petite sphère, qui occupe à son avant quelques éléments nouveaux de volume et qui en perd autant à son arrière. Comme il correspond à ceux-ci des éléments nouveaux gagnés par l'intégrale, de même qu'aux précédents, des éléments perdus, la dérivée de la fonction doit comprendre, en outre de ce que donne la différentiation sous le signe *somme* et qui provient des variations des éléments qui lui sont communs dans ses deux états, des termes *aux limites*, exprimant ce qu'apportent ou ce qu'enlèvent les éléments gagnés ou perdus. Ces termes se trouvent être en tout, dans les dérivées premières du potentiel, de l'ordre du rayon de la petite sphère et négligeables. Mais ils valent $-\frac{4}{3}\pi\rho$ dans les trois dérivées secondes prises deux fois par rapport à $x$, ou deux fois par rapport à $y$, ou deux fois par rapport à $z$, $\rho$ désignant la densité à l'intérieur et autour de la petite sphère : circonstance qui rend, conformément au théorème de Poisson, la somme de ces trois dérivées secondes égale à $-4\pi\rho$.

Un savant professeur de mécanique, juge d'une haute compétence, M. Gilbert, s'est exprimé, au sujet de cette méthode, dans les termes suivants (dont il autorise la reproduction ici) : « A mon sens, il n'y a pas à douter que ce ne soit là la vraie démonstration du théorème de Poisson... ; tout ce que Clausius, Gauss, Dirichlet, etc. ont écrit là-dessus peut être fort élégant, mais n'atteint pas le fond de la question, comme le fait cette démonstration, si simple et si directe ».

71. — *Des solutions singulières qui se présentent dans le problème du mouvement curviligne d'un point sous l'action d'une force centrale.*

(Comptes-Rendus, 3 avril 1877 ; t. LXXXIV, p. 944. — Voir également les numéros 12 à 14 et 16 à 19, p. 67 à 82 et 87 à 111, d'un mémoire inséré au t. VI du Recueil de la Société des Sciences de Lille, 1879.)

On enseigne, depuis Leibniz, dans les cours de mécanique, que toute la suite des états d'un système de points est complétement déterminée par les équations différentielles de leur mouvement, jointes à la connaissance de l'état initial, quoique cette opinion n'ait jamais été fondée que sur des aperçus assez vagues et sur l'absence d'exemples *connus* où elle se trouvât en défaut. Or, dès 1806, Poisson fut très-surpris, en se posant le problème du mouvement d'un point sur une ligne fixe et où l'accélération serait proportionnelle à certaines puissances positives de l'espace, de trouver que le mobile, déposé à l'origine des espaces sans vitesse initiale, pouvait aussi bien, d'après l'équation, rester indéfiniment à cette origine que la quitter au bout d'un temps quelconque : l'*arrêt* est représenté par une solution singulière de l'équation, tandis que le départ et le mouvement sont exprimés par l'intégrale générale. Ce *paradoxe*, sur lequel Poisson appela toute l'attention des géomètres, paraissait oublié des professeurs de mécanique et même des analystes, lorsque M. Boussinesq, qui l'ignorait entièrement, fut conduit à penser qu'il existe des mouvements dont la suite n'est pas réglée par leurs équations différentielles *seules*, et où les intégrales admettent, par suite, des bifurcations, des raccordements plus ou moins multiples, permettant de temps à autre des changements de voie. Et il trouva d'abord toute une classe d'intégrales singulières représentant des points d'arrêt, dans le genre de celui de Poisson, mais avec une variété bien plus grande, en ce sens que l'indétermination peut ou doit même (suivant les exemples choisis) se renouveler pendant toute la suite des temps, en une foule d'endroits et d'une foule de manières, tandis qu'elle se présentait une fois seulement et en un seul point dans l'exemple de Poisson. De plus, les raccordements sont susceptibles d'y être ménagés avec une continuité aussi parfaite qu'on le désire, vu que le contact des intégrales générales avec les intégrales singulières peut y être, non-seulement du second ordre, comme l'exige la nature de l'équation différentielle, mais d'un ordre supérieur quelconque et même infini. En outre, M. Boussinesq observa qu'un grand nombre de solutions quasi-singulières, à raccordements asymptotiques ou ne joignant, en toute rigueur abstraite, les intégrales particulières que pour des valeurs infinies de la variable $t$, sont pratiquement équivalentes aux solutions singulières proprement dites.

Mais toutes ces solutions singulières, proprement dites ou asymptotes, ne représentaient que des points d'arrêt, et les bifurcations ne se produisaient, en quelque sorte, qu'à la faveur du repos, à des moments où la

vitesse était nulle. Il y avait donc lieu de chercher d'autres exemples, où l'indétermination surviendrait pendant le mouvement même. L'auteur les a trouvés dans le cas d'un mobile que sollicite une force dirigée vers un point fixe et fonction de la distance à ce point. Comme le principe des aires y ramène la détermination du mouvement le long du rayon vecteur au problème d'un mouvement rectiligne dans lequel l'accélération dépendrait seulement de la distance à l'origine et de la constante des aires donnée, tous les points d'arrêt des solutions précédentes peuvent être transportés dans la question actuelle, et ils y deviennent des cercles, vu la rotation qui les emporte autour du point fixe. Le mobile, arrivé sur ces cercles, peut, à volonté, ou les quitter pour s'engager sur une trajectoire particulière, ou s'y maintenir pendant un temps arbitraire en y avançant d'un mouvement uniforme. M. Boussinesq applique d'ailleurs ce résultat au mouvement relatif du système que forment deux atomes soumis à leur action mutuelle, et il prouve que toute expression de cette force, propre à expliquer les deux ordres des phénomènes physiques et chimiques, entraîne l'existence d'au moins une trajectoire singulière, avec cette circonstance que, si la constante des aires n'est pas trop grande, le mobile viendra indéfiniment s'y replacer après l'avoir quittée, ou que l'indétermination se reproduira sans fin.

Dans tous ces exemples, où, comme dans la nature, les accélérations ne dépendent que *des positions* relatives actuelles, et *non des vitesses*, l'état initial doit vérifier une certaine relation pour que les bifurcations se produisent, en sorte que les cas où elles se présentent ont quelque chose d'exceptionnel. M. Boussinesq montre qu'il en serait autrement si les accélérations étaient fonction aussi des vitesses.

En résumé, le principe de la détermination complète de la suite des mouvements par leurs équations différentielles n'est plus admissible, comme principe universel; et, par une conséquence rigoureuse, les *forces* des géomètres, je veux dire ces causes de mouvement que l'on se représente comme ayant le rôle précis et exclusif de produire des accélérations, cessent d'être suffisantes en mécanique. Elles demandent à être complétées, au moins logiquement, par l'adjonction de causes d'une autre espèce, de principes directeurs, dont la fonction serait de régler le choix entre les voies diverses que peut ouvrir à un moment donné, devant un système matériel, le jeu des forces purement productrices d'accélérations. Quant au mode d'action de

toutes ces causes de mouvement, soit forces, soit principes directeurs, inutile de dire qu'il reste complétement inconnu.

Mais est-ce seulement en mécanique rationnelle, et comme création pure de l'esprit, qu'il y a lieu d'introduire l'idée des principes directeurs, ou bien la nature lui a-t-elle ménagé d'importantes applications, dans certains ordres *singuliers* de faits que le bon sens se refuse à placer sous la dépendance exclusive des lois mathématiques ordinaires ? Il sera parlé plus loin (p. 79) d'un travail où l'auteur a cru pouvoir se poser cette question.

72.— *Sur les mouvements quasi-circulaires d'un point soumis à l'attraction d'un centre fixe.*

(Comptes-Rendus, 9 juillet 1877; t. LXXXV, p. 65.)

73. — *Théorie des mouvements quasi-circulaires d'un point pesant sur une surface de révolution creuse à axe vertical.*

(Comptes-Rendus, 15 avril 1878; t. LXXXVI, p. 959.)

74. — *Des petits mouvements d'un point pesant sur une surface fixe, décrite autour d'un axe de révolution vertical.*

(Comptes-Rendus, 10 septembre 1877; t. LXXXV, p. 539.)

75. — *Théorie du mouvement quasi-circulaire d'un point, attiré par un centre fixe, et des oscillations d'un corps pesant sur une surface creuse de révolution à axe vertical.*

(Mémoires de la Société des Sciences de Lille, 1879; t. VI, p. 189 à 240.)

Ces articles sont consacrés à l'étude du mouvement d'un point, dans des circonstances où le principe des aires permet de ramener les questions au problème simple de mouvements rectilignes d'une amplitude restreinte et dont l'accélération se trouverait ne dépendre que de la coordonnée actuelle du mobile. Entre autres résultats, l'auteur y démontre:

1° Que, dans de telles oscillations rectilignes, le milieu de la trajectoire ne coïncide généralement plus avec la situation d'équilibre, ni avec la moyenne des positions occupées successivement par le mobile, dès la deu-

xième approximation, où l'on ne néglige plus le carré des déplacements, et que, à une troisième approximation, la durée de la période d'oscillation est elle-même changée;

2° Qu'un mobile, attiré vers un centre fixe par une force fonction de la distance à ce centre, ne peut décrire des orbites quasi-circulaires toutes fermées qu'autant que l'attraction, ou pour mieux dire, la tendance vers le point fixe, est, ou proportionnelle à la distance, ou inversement proportionnelle à son carré; .

3° Qu'il n'existe pas de surface polie de révolution, à axe vertical, sur laquelle un point pesant puisse décrire rigoureusement des orbites quasi-circulaires toutes fermées, mais que l'ellipsoïde dont l'axe polaire est la moitié de l'axe équatorial approche, infiniment plus que les autres surfaces, de jouir de cette propriété;

4° Que, dans le cas de petites oscillations quelconques d'un point pesant sur une surface concave de révolution à axe vertical, la trajectoire peut être regardée comme une ellipse, en projection horizontale, même à une deuxième approximation, où l'on ne néglige que les puissances des excursions supérieures à la quatrième : mais cette ellipse est animée, autour de son centre, d'un mouvement de rotation, sensiblement uniforme, proportionnel à l'aire de l'ellipse et à un coefficient, positif ou négatif, dépendant de la forme de la surface (résultat que l'on connaissait pour le pendule conique, où la surface est une sphère); en outre, le mouvement relatif du mobile sur son ellipse ne se fait plus pendulairement, en projection suivant les axes de l'ellipse;

5° Le coefficient exprimant le rapport de la vitesse angulaire de l'orbite à son aire ne s'annule que pour l'ellipsoïde dont l'axe vertical polaire est moitié de l'axe équatorial (ou pour toute surface ayant, en son fond, un contact du quatrième ordre avec cet ellipsoïde), et le mouvement suivant les axes est alors pendulaire, quoique la durée de l'oscillation dépende des amplitudes;

6° La durée de l'oscillation, ou de la révolution du point sur son orbite *mobile*, n'est constante, au degré d'approximation considéré, que pour les surfaces à méridien cycloïdal et pour celles qui ont avec elles un contact du quatrième ordre; et elle cesse de l'être à une approximation plus élevée : de même, à cette approximation plus élevée, il n'y a plus de surface, ni de courbe, sur lesquelles le mouvement d'un point pesant puisse être pendulaire en projection horizontale; etc.

## VI. — Théorie analytique de la chaleur, et physique.

76. — *Etude sur la propagation de la chaleur dans un milieu homogène.*

(Thèse pour le doctorat ès-sciences mathématiques; Paris, Gauthier-Villars 1867.)

77. — *Sur un nouvel ellipsoïde, qui joue un grand rôle dans la théorie de la chaleur.*

(Comptes-Rendus, 15 juillet 1867, t. LXV, p. 104.)

78. — *Sur les spirales que décrit la chaleur, en se répandant, à partir d'un point intérieur, dans un milieu homogène non-symétrique.*

(Comptes Rendus, 15 juin 1868, t. LXVI, p. 1194.)

79. — *Etude sur les surfaces isothermes et sur les courants de chaleur, dans les milieux homogènes chauffés en un de leurs points.*

(Journal de Mathématiques, 1869; t. XIV, p. 265 à 297. — Voir aussi une Note dans le t. XVIII, 1873, p. 376.)

80. — *Construction générale des courants de chaleur, en un point quelconque d'un milieu athermane, homogène ou hétérogène.*

(Comptes-Rendus, 2 août 1869; t. LXIX, p. 329.)

Tout le monde connaît les belles expériences de M. de Senarmont sur la conductibilité des cristaux pour la chaleur. Le savant minéralogiste taillait en divers sens, dans un cristal, des plaques minces, qu'il chauffait en un point central après avoir recouvert de cire une des faces. La cire, fondant, s'éloignait par capillarité du point chauffé, et dessinait autour de ce point comme centre, sous forme de bourrelet, une ellipse isotherme. De Senarmont constata qu'en replaçant idéalement toutes les plaques dans le cristal, de manière à faire coïncider les points chauffés, les ellipses devenaient concentriques et semblables (avec orientation pareille) aux intersections faites par leurs plans dans un même ellipsoïde; et il regarda celui-ci comme le type

des surfaces isothermes qui se seraient produites dans le cristal entier, si l'on avait pu le chauffer en un point intérieur.

Duhamel a prouvé depuis, théoriquement, que ces inductions étaient exactes pour les corps homogènes possédant trois plans rectangulaires de symétrie de contexture, les seuls qu'il ait étudiés. Mais il restait à voir s'il en est de même quand on ne suppose aucune symétrie de cette sorte, c'est-à-dire quand le flux de chaleur émis par conductibilité, à travers un élément plan, peut être une fonction linéaire quelconque des trois dérivées partielles de la température par rapport aux coordonnées. Il fallait aussi tenir compte des variations qu'éprouvent les coefficients de conductibilité extérieure en fonction de la température, soit à cause du changement physique d'état de la cire, soit par le fait de son retrait, afin de prouver que ces variations peuvent bien influer sur les dimensions absolues des courbes isothermes, mais non sur leur forme, ni sur leur orientation. Telles sont les questions que M. Boussinesq a résolues dans les mémoires analysés. Il y prouve que la surface trouvée par M. de Senarmont doit bien exister, d'après la théorie, et qu'elle est un ellipsoïde, mais qu'elle diffère, en général, de l'ellipsoïde représentant les surfaces isothermes produites dans le corps massif. Ce dernier ellipsoïde se trouve intérieur au premier, qu'il touche seulement aux deux extrémités d'un certain diamètre. Les plans conjugués au diamètre commun les coupent tous les deux suivant des ellipses semblables. La surface intérieure, type des surfaces isothermes du corps massif, n'est autre que *l'ellipsoïde principal* de Lamé. L'autre est appelé par M. Boussinesq *ellipsoïde des conductibilités linéaires*, parce que chacun de ses demi-diamètres a pour carré le coefficient de conductibilité d'une barre de même direction. Il n'a rien de commun avec un ellipsoïde des conductibilités considéré par Lamé, et auquel on ne connaît aucune application.

Les mêmes considérations qui, dans l'étude de la double réfraction (voir p. 59 ci-dessus), ont prouvé que les cristaux des cinq premiers systèmes se comportent comme s'ils avaient trois plans rectangulaires de symétrie de contexture, s'appliquent à la propagation de la chaleur et montrent que les cristaux du sixième système, seuls, peuvent avoir un ellipsoïde des conductibilités linéaires distinct de l'ellipsoïde principal. Ces deux ellipsoïdes n'en font donc qu'un dans les cinq premiers systèmes cristallins, auxquels s'applique par conséquent l'analyse de Duhamel.

La chaleur, en se répandant soit dans la plaque, soit dans le milieu massif, à partir du point chauffé, ne se transmet en ligne droite que chez les corps

symétriques, où les deux ellipsoïdes se confondent. Dans les autres, les *filets* ou *courants* élémentaires *de chaleur* ont la forme de spirales, issues du point chauffé, et qui sont, de plus, parallèles aux faces de la plaque, ou, s'il s'agit d'un corps massif, enroulées sur des cônes ayant pour sommet le point chauffé et pour bases les sections de l'ellipsoïde principal par les plans conjugués en direction au diamètre commun des deux ellipsoïdes. M. Boussinesq déduit très-simplement la forme de ces courants de chaleur, ainsi que les angles sous lesquels ils coupent les rayons issus du point chauffé, d'une construction simple, qui relie, dans tout milieu athermane, la direction et l'intensité du courant de chaleur, produit en un endroit quelconque, à la direction qu'y ont les surfaces isothermes et aux chutes de température observées au passage de l'une de ces surfaces à l'autre.

81. — *Sur diverses propriétés, dont jouit le mode de distribution d'une charge électrique à la surface d'un conducteur ellipsoïdal.*

(Comptes-Rendus, 16 décembre 1878; t. LXXXVII, p. 978. — Voir aussi les N$^{os}$ 28 et 38 du Mémoire sur l'application des potentiels à la théorie de l'équilibre d'élasticité.)

Ces propriétés sont les suivantes : 1° si chaque partie de la charge est transportée, parallèlement à une même direction quelconque, de l'ellipsoïde sur une plaque plane coïncidant avec la section diamétrale conjuguée à cette direction, la charge se trouvera en équilibre sur la plaque ; 2° des plans parallèles, infiniment voisins et équidistants, découpent à la surface de l'ellipsoïde des zones électriques équivalentes ; 3° il n'y a pas d'autre mode de répartition possible de la charge, que celui pour lequel elle est en équilibre, qui présente cette propriété, de l'équivalence des zones de même hauteur limitées par des plans parallèles de direction quelconque.

82. — *Recherches sur la théorie des battements* (en commun avec M. Terquem, professeur de physique à la Faculté des Sciences de Lille).

(Journal de Physique théorique et appliquée, de M. d'Alméida ; t. IV, 1875.)

Dans la partie théorique de ce travail, M. Boussinesq avait à évaluer la hauteur du son que perçoit l'oreille, lorsqu'on lui transmet une série de vibrations dont la durée est assez peu variable, mais dont l'amplitude change entre des

limites très-étendues, et qui se succèdent par séries se reproduisant périodiquement à des intervalles rapprochés. Il a été conduit à des résultats très simples, que l'expérience confirme, en attribuant aux éléments dont se forme la hauteur du son perçu, c'est-à-dire aux hauteurs des divers sons que l'on entendrait si chaque vibration se reproduisait indéfiniment, des coefficients d'importance proportionnels au produit de leur intensité par leur durée, produit qui doit mesurer leur effet physiologique, et en prenant ensuite la moyenne.

## VII. — Analyse et Géométrie.

83.—*Méthode nouvelle pour la résolution d'une classe importante et nombreuse d'équations transcendantes (qui se présentent fréquemment dans des questions de mécanique).*

(Comptes-Rendus, 17 avril 1871 ; t. LXXII, p. 480.)

L'auteur étudie des équations dont le premier membre, qu'il s'agit d'égaler à zéro, est une fonction définie par une équation différentielle linéaire et qui, pour d'assez grandes valeurs de la variable $x$, tend vers l'une des formes $A\cos(x+B)$, $A\sin(x+B)$, où A et B ne sont plus que lentement variables. Il détermine, par un procédé où dominent des intégrations par parties effectuées de $x = x$ à $x = \pm\infty$, certaines expressions de B, très-approchées dès que $x$ est un peu grand ; et il lui suffit ensuite d'égaler $x+B$ à un multiple, impair ou pair, de $\frac{\pi}{2}$ pour obtenir les diverses racines. La méthode, appliquée aux deux équations

$$\int_0^\pi \cos(x\cos\alpha)\,d\alpha = 0, \quad \frac{d}{dx}\int_0^\pi \cos(x\cos\alpha)\,d\alpha = 0,$$

si importantes dans l'étude des phénomènes présentant la symétrie cylindrique autour d'un axe, conduit à l'expression approchée très-simple des racines (positives)

$$x = \left(\frac{n}{2} \mp \frac{1}{8}\right)\pi + \sqrt{\left(\frac{n}{2} \mp \frac{1}{8}\right)^2 \pi^2 - \left(\frac{1}{8} \mp \frac{1}{4}\right)},$$

dans laquelle il faut faire successivement $n = 1$, $= 2$, $= 3$, $= 4$, ... jusqu'à l'infini, et prendre les signes supérieurs pour la première équation, les signes inférieurs pour la seconde. L'erreur, de quelques millièmes seulement pour la plus petite racine, correspondant à $n = 1$, et de quelques dix-millièmes pour la suivante, devient de plus en plus insensible à mesure qu'on passe aux racines de plus en plus élevées, dont la détermination par toute autre méthode exige des calculs d'une excessive longueur et, bientôt même, impraticables. La confrontation est facile à faire pour la seconde équation, dont M. de Saint-Venant a déterminé laborieusement les neuf premières racines, avec l'aide de deux calculateurs occupés pendant plus d'un mois (*Comptes-rendus*, 8 février 1869, t. LXVIII, p. 294).

84. — *Sur un changement de variables, qui rend intégrables certaines équations aux dérivées partielles du second ordre.*

(Comptes-Rendus, 11 mars 1872 ; t. LXXIV, p. 730. — Voir aussi une Note du 22 septembre 1873, t. LXXVII, p. 667.)

La transformation dont il s'agit ne diffère pas de celle de Laplace, circonstance qu'ignorait l'auteur. Mais, si le procédé était connu, M. Boussinesq en indique du moins un emploi nouveau, car il s'en sert pour transformer une équation à coefficients variables en une autre à coefficients constants, admettant, par suite, des intégrales en séries de termes à forme exponentielle ou trigonométrique (et il prouve qu'on arrive ainsi à ce but toutes les fois qu'une pareille transformation est possible), tandis qu'on n'avait employé jusqu'alors le procédé de Laplace qu'à chercher les intégrales sous forme finie que peut comporter l'équation aux dérivées partielles.

85. — *Sur une propriété remarquable des points où les lignes de plus grande pente d'une surface ont leur plan osculateur vertical, et sur la différence qui existe généralement, à la surface de la terre, entre les lignes de faîte ou de thalweg et celles le long desquelles la pente du sol est un minimum.*

(Comptes-Rendus, 11 décembre 1871 ; t. LXXIII, p. 1368.)

86. — *Sur les lignes de faîte et de thalweg.*

(Comptes-Rendus, 22 juillet 1872 ; t. LXXV, . 198 )

87. — *Sur les lignes de faîte et de thalweg.*

(Comptes-Rendus, 7 octobre 1872 ; t. LXXV, p. 835. — Voir aussi le § XVI de l'Essai sur la théorie des eaux courantes, p. 167 à 179.)

Ces articles sont consacrés à l'étude de divers caractères géométriques, remarquables, que l'action des eaux courantes a imprimés à la surface terrestre. L'auteur y définit les lignes de *thalweg* et de *faîte* des faisceaux étroits de lignes de plus grande pente, dont quelques unes (suivies en descendant) se séparent du faisceau à droite et à gauche, sur tout son parcours, s'il s'agit d'un faîte, ou viennent, au contraire, s'y réunir, s'il s'agit d'un thalweg. Il appelle *bassin*, le lieu des lignes de plus grande pente qui aboutissent à une même dépression du sol, *versant*, le lieu des lignes de plus grande pente qui se détachent supérieurement d'un même faîte pour aboutir inférieurement à un même thalweg ; etc. — Il démontre que, tout près de chaque faîte ou thalweg et du côté vers lequel le faîte ou thalweg tourne (en projection horizontale) sa convexité, il existe une courbe en tous les points de laquelle les lignes de plus grande pente qui y passent ont leur plan osculateur vertical et où la pente de la surface est moindre qu'aux points voisins situés au même niveau. M. de Saint-Venant avait déjà, en 1852, considéré les lignes qui jouissent de cette dernière propriété, d'où il avait déduit leur équation ; et M. Breton de Champ avait reconnu, en 1870, qu'elles ne pouvaient coïncider avec les faîtes ou les thalwegs qu'autant que ceux-ci ont leur projection horizontale rectiligne. L'auteur a dégagé le premier la propriété générale qui, de ces lignes *des déclivités minima*, et d'autres lignes analogues, dites *des déclivités maxima*, intercalées entre les précédentes, fait les lieux des points d'inflexion des lignes de plus grande pente : il a reconnu, aussi, qu'en tous les points de ces courbes des déclivités maxima ou minima les lignes de courbure de la surface sont respectivement tangentes à celles de niveau et de plus grande pente ; etc.

88. — *Sur les rapports de l'asymptote rectiligne d'une branche de courbe avec les tangentes à cette branche de courbe.*

(Mémoires de la Société des Sciences de Lille, 1879, t. VI, p. 147 à 150.)

L'auteur, appelant $x$ et $y$ les deux coordonnées d'un point d'une branche infinie de courbe plane, compare les accroissements qu'éprouvent les deux fonctions $\frac{y}{x}, \frac{1}{x}$ quand on y fait croître la variable indépendante $x$ depuis une valeur déjà fort grande jusqu'à une autre incomparablement plus grande encore. En exprimant que le rapport de ces deux accroissements égale, d'après un théorème classique de Cauchy, le rapport de leurs dérivées, $y - x y'$, pris pour une valeur intermédiaire de $x$, il montre que, toutes les fois que l'ordonnée (à l'origine) de la tangente tend vers une limite à mesure que le point s'éloigne, la tangente tend aussi vers une limite, asymptote à la courbe. Mais, si à l'inverse, il y a une asymptote, la suite continue des positions de la tangente peut ne pas y tendre dans des cas où la branche de courbe présente une infinité d'inflexions, quoique, alors, une série discontinue formée par certaines positions de la tangente, en nombre illimité, soit toujours astreinte à se rapprocher indéfiniment de l'asymptote.

89. — *Sur la possibilité d'attribuer des dérivées à toutes les fonctions continues qui se présentent dans les applications.*

(Société des Sciences de Lille, 1879; même tome VI, p. 151 à 161.)

M. Boussinesq démontre : 1° que toute fonction continue d'une variable, et qui est sans dérivée, diffère aussi peu que l'on veut d'une autre fonction continue, admettant un nombre quelconque désigné de dérivées continues ; 2° que toute fonction continue de plusieurs variables, sans dérivées, diffère aussi peu qu'on veut d'une autre fonction continue, admettant des dérivées partielles du premier ordre continues, et à laquelle on peut appliquer par suite, au moins une fois, la règle classique de différentiation des fonctions composées.

90. —*Démonstration de l'existence des intégrales générales, dans les équations différentielles, et de la possibilité des intégrales singulières : remarques diverses sur celles-ci et, plus généralement, sur les bifurcations et réunions d'intégrales.* — *Digression sur les notions d'aire et de volume.*

(Société des Sciences de Lille, 1879 ; t. VI, p. 162 à 188.)

L'auteur prouve simplement, en s'en tenant aux valeurs réelles des variables, l'existence des intégrales générales d'un système d'équations différentielles du premier ordre, résolues par rapport aux dérivées qu'elles définissent, et la complète détermination analytique de ces intégrales, si ce n'est pour certaines des valeurs qui rendent infinies les dérivées partielles premières des seconds membres par rapport aux fonctions cherchées. Il donne aussi des exemples, pour l'équation différentielle du premier ordre, de solutions singulières qui ont un contact du deuxième ordre avec les intégrales particulières et qui, par suite, *croisent* celles-ci ou ne représentent nullement une *enveloppe*. Il montre la convenance qu'il y aurait d'étendre la notion des courbes *enveloppes* à toutes les lignes qui séparent le lieu occupé par une famille de courbes du reste du plan, de manière à y comprendre celles qui ne sont pas tangentes aux *enveloppées*, mais sont formées par leurs points de rebroussement : ce qui est le cas le plus général, sinon, peut-être, dans les applications, du moins en analyse pure, comme l'a fait voir M. Darboux (*Comptes-rendus*, 1870; t. LXXI, p. 268); etc.

Dans un dernier numéro, il éclaircit ou précise les notions d'aire et de volume, en montrant, par exemple, que, si l'on divise le plan en carrés infiment petits, par deux systèmes de droites, le rapport du nombre de ces carrés contenus dans une courbe fermée au nombre de ceux que comprend un carré constant, choisi pour unité, est une intégrale dont la valeur ne change pas, quelles que soient la position et l'orientation de la courbe fermée par rapport aux deux systèmes de droites.

91. — *Sur les dilatations linéaires éprouvées par une surface élastique que l'on déforme.*

(Comptes-Rendus, 1er avril 1878 ; t. LXXXVI, p. 816 )

92. — *Calcul des dilatations linéaires éprouvées par les éléments matériels rectilignes appartenant à une portion infiniment petite d'une membrane élastique courbe, que l'on déforme, et démonstration très simple du théorème de Gauss, sur la déformation des surfaces inextensibles.*

(Société des Sciences de Lille, 1880 ; t. VIII, p. 381 à 390.)

M. Boussinesq considère une portion assez petite de surface courbe pour

qu'on puisse, dans tous les états de déformation de la surface, lui attribuer la forme d'un paraboloïde variable ayant pour axe une de ses normales. Il exprime, dans cette hypothèse simple, la dilatation qu'éprouve par unité de longueur, pendant les déformations, toute ligne tracée sur la surface; et il montre enfin que l'égalité du produit des deux courbures principales dans deux portions infiniment petites de surface est une condition, non seulement nécessaire, mais encore suffisante, pour que ces deux portions de surface soient applicables l'une sur l'autre sans déchirure ni duplicature.

93. — *Sur les problèmes des températures stationnaires, de la torsion et de l'écoulement uniforme bien continu, dans les prismes ou dans les tuyaux dont la section normale est un rectangle à côtés courbes ou est comprise entre deux lignes fermées.*

(Journal de Mathématiques, 1880; t. VI, p. 177.)

Cet article est consacré à éclaircir, sur certains points, et à présenter sans aucun cortège de formules générales empruntées à la théorie des coordonnées curvilignes, la belle méthode que Lamé à donnée, pour intégrer les équations du problème des températures stationnaires, dans un cylindre dont la section normale est limitée par deux côtés courbes ou par quatre se coupant à angles droits, toutes les fois que l'on connaît deux familles de lignes isothermes dont fassent partie ces côtés, ou, en d'autres termes, toutes les fois qu'on a su intégrer pour le cas simple où deux faces opposées se trouvent à deux températures constantes, tandis que les deux autres faces, lorsqu'elles existent, sont supposées imperméables à la chaleur.

94 — *Coup d'œil sur la théorie des séries trigonométriques les plus usuelles.*

Cette note, composée pour le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*[1], contient, avec une exposition simple de la théorie du développement des fonctions périodiques en séries de termes procédant suivant les sinus et cosinus des multiples d'un arc, des considérations relatives à la série ou formule de Fourier (pour le cas d'une fonction finie, donnée arbitrairement entre les valeurs $-\infty$ et $+\infty$ de sa variable), et aux précautions qu'exige son emploi, par suite de cette circonstance, que la convergence de la série est parfois assez faible pour tenir en partie à l'ordre dans lequel se succèdent ses termes, aux

(1) Elle y a paru en 1881 : t. VII, p. 147.

modes de groupement des éléments de l'intégrale double (à limites infinies) qui y paraît, et non pas seulement à la petitesse absolue de ces termes ou de ces éléments.

## VIII. — Philosophie des Sciences.

95. — *Note sur la conciliation de la liberté morale avec le déterminisme scientifique.*

(Comptes-Rendus, 19 février 1877; t. LXXXIV, p. 862.)

96. — *La liberté et le déterminisme scientifique : conciliation des deux principes.*

(Journal *les Mondes*, de M. l'abbé Moigno, 22 mars 1877, et *Revue scientifique* du 14 avril 1877.)

97. — *Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale.*

(Société des Sciences de Lille, 1879; t. VI, p. 1 à 141 et 248 à 251; ou à Paris, chez M. Gauthier-Villars. — Voir le Rapport approbatif lu sur ce mémoire, par M. Paul Janet, à l'Académie des Sciences morales et politiques, le 26 janvier 1878, dans le N° de mai 1878 des Comptes-Rendus de cette Académie, t. IX, p. 696 à 719 : ce Rapport est suivi, p. 721 à 757, d'un extrait étendu du mémoire même. — Voir aussi dans le Recueil de la Société des Sciences de Lille, 1880, t. VIII, p 332 à 370, la quatrième partie d'une Etude sur divers points de la philosophie des sciences.)

Les auteurs de mécanique admettent, il y a déjà longtemps, et d'ailleurs en parfait accord avec l'expérience, que les principes dits des quantités de mouvement et des moments s'appliquent aux êtres organisés comme aux corps bruts. Depuis la découverte de la grande loi de la conservation de l'énergie, les savants sont aussi à peu près unanimes à penser qu'elle s'observe sans restriction dans le monde de la vie. Et la tendance incontestable des esprits, tendance à laquelle se sont abandonnées les plus grandes intelligences, comme Descartes et Leibniz, est d'étendre de même à toute la nature tous les principes généraux de la mécanique, c'est-à-dire d'admettre que les actions mutuelles des diverses parties élémentaires composant l'univers dépendent uniquement de la constitution et des situations relatives de ces parties. Si la

physique n'était pas déjà devenue, aux trois quarts, une branche de la mécanique, savoir, une mécanique moléculaire, et si la chimie n'aspirait pas elle-même à se résoudre en une mécanique atomique, on pourrait peut-être, sans contredire cette haute tendance de l'esprit humain, attribuer à la vie, sous ses diverses formes, le pouvoir de modifier directement l'état physico-chimique des organismes qu'elle anime et d'influer, par là, sur les réactions dynamiques des organes. Mais cette tentative n'est plus possible, dès qu'on accepte que les états physiques et chimiques eux-mêmes doivent pouvoir s'expliquer par les configurations et les mouvements des parties les plus ténues de la matière.

Or, si les équations de la mécanique, qui déterminent à chaque instant les accélérations de tous les points des systèmes, s'appliquent sans restriction à la matière organisée, le sens commun exige, d'autre part, que la vie, à ses divers états, soit quelque chose de plus qu'une certaine manifestation des forces en jeu dans la matière brute, et qu'elle intervienne *à sa manière*, qu'elle ait son rôle supérieur dans les faits, en un mot, que la physiologie ne se réduise pas à être un simple prolongement de la physique et de la chimie, mais qu'elle reste l'expression de tout un ordre distinct de sciences ou comme une dynamique irréductible à celle des corps bruts. Le sens commun demande donc que, dans les systèmes matériels appelés *organismes vivants*, les équations de la dynamique des mécaniciens-géomètres ne déterminent pas *à elles seules* tout l'enchaînement des phénomènes. Voilà pourquoi l'auteur, convaincu d'avance de cette conciliation possible entre deux tendances paraissant également fondées, a été amené à rechercher les bifurcations de voies, les indéterminations partielles, que comportent parfois les intégrales des problèmes de mécanique et que nous avons rappelées plus haut (n° 71, p. 66); bifurcations dont un exemple, rencontré par Poisson, lui avait causé tant d'embarras, faute par lui de se souvenir que les *forces des mécaniciens* ne sont pas tout, dans l'univers, et qu'on y trouve aussi des *pouvoirs directeurs*, ayant pour rôle non d'imprimer des accélérations, ni, par suite, des vitesses, mais d'utiliser d'une certaine manière celles qu'ils empruntent aux puissances inférieures. Et si les *lois physiologiques* viennent disposer de la plus grande partie de cette indétermination, pour organiser et conserver la matière vivante d'après les principes d'un déterminisme supérieur distinct du déterminisme physico-chimique, le bon sens n'est pas fâché de pouvoir accorder le reste aux volontés libres des êtres intelligents; car il lui répugnerait de ne faire, en ce monde,

aucune part à la contingence et de laisser une fatalité inexorable envahir toutes les sphères.

Quoique l'état d'imperfection du calcul intégral ne nous permette d'aborder, au point de vue indiqué, que des problèmes de mécanique extrêmement simples, toutefois, si ces inductions sont fondées, on comprend que les problèmes dont il s'agit puissent déjà nous offrir, et nous aider à comprendre, certains caractères généraux de la vie, tenant à des conditions d'existence physico-chimiques sans lesquelles il lui serait impossible de se manifester. Or, c'est justement ce qui arrive. Dans toutes les questions traitées, l'état initial doit présenter quelque chose de spécial, vérifier certaines relations, pour que les bifurcations de voies se produisent : on n'aurait aucune chance finie de les voir se réaliser, si l'on se contentait de jeter au hasard un peu de matière dans une certaine région de l'espace. L'analyse montre de plus que, si les bifurcations se présentent une fois, elles pourront, suivant les cas, ou ne pas se reproduire, ou se représenter un nombre indéterminé de fois pour ne plus renaître ensuite, ou persister indéfiniment. Dans la plus concrète des questions abordées, qui est celle du mouvement relatif de deux atomes supposés seuls dans l'univers, l'indétermination est ramenée indéfiniment par le jeu même de la force soumise au calcul, c'est-à-dire de l'action mutuelle des deux atomes. Donc, à côté d'une probabilité infiniment faible de première réalisation, il y a une probabilité finie, sinon même la certitude, pour que les bifurcations de voies se reproduisent indéfiniment dès qu'elles se sont présentées une fois, pourvu que ce soient les mêmes atomes qui restent en présence, ou, en d'autres termes, pourvu que le milieu au sein duquel se déroulent les phénomènes ne soit pas changé. L'auteur trouverait assez naturel que ces faits d'analyse fussent comme un premier indice de deux grandes lois, celle de l'impossibilité de la génération spontanée, d'une part, et, d'autre part, celle de la transmission illimitée de la vie au milieu de conditions physico-chimiques assez favorables.

Il en tire cette autre conséquence, que le géomètre peut raisonner, dans l'étude du monde inorganique, comme si les équations différentielles y déterminaient sans exception tout l'enchaînement des phénomènes. Les bifurcations de voies lui paraissent n'ouvrir, en quelque sorte, à la vie que d'imperceptibles joints, où peuvent seuls se mouvoir des êtres spéciaux, déjà bien adaptés à d'aussi difficiles conditions d'existence, c'est-à-dire, portant la marque d'une organisation qui les distingue du reste de la nature.

Accessoirement, le travail analysé contient des considérations sur divers

points intéressants de la philosophie des sciences, tels que l'interprétation de la continuité abstraite et de l'asymptotisme dans les applications de l'analyse aux choses réelles, le rôle des frottements et la dissipation de l'énergie dans les conditions de nos expériences (où nous tendons à réaliser des états dynamiques permanents au sein d'une matière plus calme), la réversion possible des mouvements purement matériels, etc.

98. — *Evaluation et loi physiologique des sensations.*

(Société des Sciences de Lille, 1879, t. VI, p. 143 à 146.)

Ce petit article est consacré à l'éclaircissement d'idées très-répandues, venues d'Allemagne et qu'on n'avait peut-être pas suffisamment définies. L'auteur admet que le plus petit accroissement *perceptible* d'une sensation correspond à un accroissement *déterminable* (au moins par un calcul de moyennes) de l'intensité de sa cause physique; et il convient d'appeler *mesure d'une sensation*, le nombre qui exprime combien de petits accroissements perceptibles il faudrait communiquer successivement à une sensation de même nature, d'abord nulle, pour la rendre égale à celle que l'on considère; etc.

99. — *Réflexions diverses sur les forces des mécaniciens.*

(Société des Sciences de Lille, 1879, t. VI, p. 241 à 247.)

L'auteur se demande comment il se fait que, là où, dans la nature, nous voyons se produire une accélération de mouvement, positive ou négative, nous soyons portés aussitôt à concevoir appliquée une force, c'est-à-dire, en choisissant l'image la plus ordinaire aux mécaniciens, quelque chose comme nne corde tendue qui tirerait, suivant le sens de l'accélération, une main invisible. Il en trouve la raison dans ce double fait : 1° que, d'une part, d'après la loi fondamentale de la mécanique, les accélérations de divers atomes en présence sont fonction de leurs distances mutuelles, en sorte que celles que nous faisons naître par le jeu de nos muscles dépendent des contractions ou raccourcissements imprimés à ceux-ci; 2° et que, d'autre part, nos sensations intimes d'*effort* sont aussi en relation précise avec ces mêmes raccourcissements de nos fibres musculaires. De là naît, en nous, l'idée

d'une corrélation stricte entre les accélérations produites ou empêchées et les efforts déployés, corrélation que nous transportons ensuite dans le monde extérieur, par un procédé de généralisation qui nous est ordinaire.

M. Boussinesq montre combien il doit y avoir de différence entre ces causes fictives de mouvement, créées par l'imagination sur le *type* de nos efforts personnels, et les véritables puissances physico-chimiques qui nous restent complétement inconnues. Toutefois, il est loin de blâmer l'usage qu'en font les mécaniciens, surtout dans les questions difficiles, où elles permettent d'utiliser ces notions vagues, mais précieuses, du sentiment, dont elles parlent la langue, notions souvent impossibles à débrouiller, et qui nous viennent sans doute de l'expérience. Peut-être, sans leur aide, sans cette catégorie de sensations qui nous fait juger immédiatement du *poids* des corps avant que nous en connaissions le sens dynamique, ne serions-nous pas arrivés encore au grand principe fondamental de la conservation de la masse. etc.

100. — *Sur le rôle et la légitimité de l'intuition géométrique.*

(*Revue philosophique* d'octobre 1879, et première partie de l'Etude sur divers points de la philosophie des sciences, p. 255 à 276 du t. VIII des Mémoires de la Société des Sciences de Lille, 1880.)

101. — *Etude sur divers points de la philosophie des sciences.*

(Société des Sciences de Lille, 1880, t. VIII, p. 255 à 380, et Paris, 1879, chez M. Gauthier-Villars.)

102. — *Sur l'impossibilité d'arriver aux notions géométriques par une simple condensation d'un grand nombre de résultats de l'expérience.*

(*Revue philosophique* d'avril 1880, et Société des Sciences de Lille, 1880, t. VIII, p. 371 à 378.)

L'auteur a essayé d'aborder, dans ces études, un grand nombre de questions de philosophie scientifique qui se présentent, en mille occasions, à l'esprit du physicien ou du mécanicien géomètre, et qu'il ne lui est pas défendu de discuter. Citons, comme exemple, le sujet traité dans le premier de ces mémoires. M. Boussinesq y établit, contrairement à des assertions de quelques géomètres non-euclidiens, adversaires, en théorie, de l'évidence ou

intuition géométrique, que notre sens intérieur de l'étendue et des figures, le sens de la localisation ou, en un mot, de la représentation, n'est pas un simple produit de l'expérience, toujours incomplète et relativement grossière; qu'il constitue la mieux définie, la plus parfaite de nos facultés intellectuelles, et que, sans elle, tout raisonnement clair nous serait impossible, non-seulement en géométrie, mais aussi dans les autres branches des mathématiques, même les plus abstraites, etc.

Lille. 12 avril 1880.

Lille Imp. L. Danel.

## IX. — Supplément.

103. — *Sur une raison générale, propre à justifier synthétiquement l'emploi des divers développements de fonctions arbitraires usités en Physique mathématique.*

(Comptes-rendus, 7 mars 1881 ; t. XCII, p. 713 ; et Journal de Mathématiques de 1881, p. 156, à la fin du mémoire n° 94, analysé ci-dessus, p. 78.)

Cet article est relatif aux développements en série que l'on emploie constamment dans la Physique mathématique, pour décomposer en termes d'une certaine forme les fonctions arbitraires exprimant l'état initial des corps. L'auteur établit la légitimité de ces développements, en montrant : 1° d'une part, que leur forme résulte de ce que les équations aux dérivées partielles des problèmes considérés sont l'équivalent d'une infinité d'équations différentielles simultanées, linéaires et à coefficients constants ; 2° d'autre part, que leur convergence est due à la graduelle variation de l'état physique, toujours supposée, en vertu de laquelle cet état est, à chaque instant, sensiblement le même pour un nombre très grand de molécules voisines, n'occupant qu'une portion imperceptible de l'espace ; ce qui annihile, dans la série, l'influence des termes très éloignés ou exprimant des états rapidement variables d'une molécule aux molécules contiguës.

104. — *Égalité des abaissements moyens que produisent, chacune, aux points où est déposée l'autre, deux charges égales, arbitrairement distribuées, le long de deux circonférences concentriques, sur un sol horizontal, ou sur une plaque circulaire horizontale ayant même centre que ces circonférences et appuyée ou encastrée sur tout son contour.*

(Comptes-Rendus, 14 novembre 1881 ; t. XCIII, p. 783.)

Cette loi de réciprocité, découverte par l'auteur, établit un rapprochement curieux entre un sol élastique de dimensions indéfinies et une plaque mince limitée en tous sens. Il en résulte, par exemple, qu'étant donnée une plaque circulaire horizontale, appuyée ou encastrée sur tout son contour, un poids isolé quelconque, déposé sur cette plaque à une certaine distance du centre,

produit, en ce centre, le même abaissement (ou la même *flèche*) qu'il produirait à l'endroit où il se trouve, si on l'en ôtait pour le déposer au centre.

105. — *Equilibre d'élasticité d'un solide limité par un plan.*

(Comptes-Rendus, 27 novembre 1882, t. XCV, p. 1052.)

L'auteur montre que les intégrales des équations indéfinies de l'équilibre d'élasticité, qu'il avait données dans son article du 20 mai 1878 (n° 31 ci-dessus, pages 36 et 37), et qui lui avaient permis d'exprimer très simplement l'équilibre d'un solide sollicité à sa surface par des actions normales, conduisent, d'une manière presque aussi simple, à la solution du cas plus général où ces actions sont obliques. Il suffit, pour cela, d'y employer, au lieu du potentiel logarithmique à trois variables, dont il a été parlé ci-dessus (p. 37), un autre potentiel, ayant le précédent pour sa dérivée par rapport à la coordonnée $z$ normale à la surface. M. Boussinesq avait considéré le premier cet autre potentiel, dans une note de l'édition française de la *Théorie de l'Élasticité* de Clebsch, par MM. de St-Venant et Flamant (premier fascicule, publié en 1881, p. 401); mais c'est M. Valentino Cerruti, professeur de mécanique rationnelle à l'Université de Rome, qui, dans un mémoire imprimé en 1882 parmi ceux de l'Académie *dei Lincei*, a reconnu qu'il s'introduisait naturellement dans les formules de l'équilibre d'un corps limité par un plan et y supportant des pressions obliques. La méthode employée par le savant auteur italien pour traiter ce problème, et qu'il présente comme une application d'un procédé plus général d'intégration dû à M. Betti, est, d'ailleurs, beaucoup plus compliquée que celle dont il est question dans l'article analysé ici.

106. — *Comment se transmet, dans un solide élastique isotrope en équilibre, la pression exercée sur une très petite partie de sa surface.*

(Comptes-Rendus, 7 novembre 1881; t. XCIII, p. 703.)

107. — *Sur la transmission d'une pression oblique, de la surface à l'intérieur, dans un solide isotrope et homogène en équilibre.*

(Comptes-Rendus, 4 décembre 1882; t. XCV, p. 1149.)

Parmi les problèmes qu'on peut se poser touchant la manière dont les actions exercées à la surface des solides se transmettent dans leur intérieur, à

l'état d'équilibre, un des plus naturels, et même le premier qui se présente à l'esprit, est celui des pressions qu'on fait naître dans un corps, lorsqu'on le touche en un de ses points, tandis que des parties de sa surface ou de sa masse suffisamment éloignées sont maintenues fixes. Telle est la question résolue dans ces deux notes, dont la première concerne le cas où la pression exercée est normale et, la seconde, celui où elle est quelconque.

Il y est démontré que *l'action extérieure donnée se transmet à l'intérieur, sur les couches matérielles parallèles à la surface et de plus en plus profondes, sous la forme de pressions obliques, dirigées exactement à l'opposé du point de la surface où s'exerce la force extérieure, et égales, pour l'unité d'aire, au produit du facteur constant* $\frac{3}{2\pi}$ *par la composante de cette force suivant leur propre sens, par l'inverse du carré de la distance* $r$ *à son point d'application et par le rapport de la profondeur* $z$ *de la couche à la même distance* $r$. On voit par là que la transmission des pressions, d'une couche à l'autre, se fait de la même manière dans tous les solides isotropes.

L'auteur étudie aussi la forme que prend la surface du corps dans le voisinage du point touché.

108. — *Comment se répartit, entre les divers points de sa petite base d'appui, le poids d'un corps dur, à surface polie et convexe, posé sur un sol horizontal élastique.*

(Comptes-Rendus, 22 janvier 1888; t XCVI, p. 245.)

Le mode de répartition dont il s'agit doit se déterminer par la condition que le sol prenne, sur toute l'étendue de sa petite surface de contact avec le corps, la forme même de la base d'appui du corps dur, comme on a vu plus haut (p. 39). L'auteur montre que cette condition se trouve satisfaite quand la surface de contact est une certaine ellipse, ayant ses axes dirigés suivant les deux plans normaux principaux du corps relatifs à son point le plus bas, et quand les pressions par unité d'aire y sont partout proportionnelles aux ordonnées d'un demi-ellipsoïde à axe vertical décrit sur l'ellipse en question comme base. Le demi-petit axe $b$ et le demi-grand axe $a$ de l'ellipse sont liés au poids P du corps, et aux deux rayons principaux de courbure correspondants R′ et R de sa base d'appui, par deux équations transcendantes (où entrent des intégrales elliptiques), desquelles il résulte que la forme de

l'ellipse dépend uniquement du rapport des deux rayons de courbure R′, R, et que ses dimensions $2a$, $2b$, pour une valeur donnée de ce rapport, sont proportionnelles à la racine cubique du produit du poids P du corps par l'un des deux rayons R ou R′. On a, du reste, sensiblement, tant que le rapport $\frac{R'}{R}$ dépasse 0,1 ou même seulement 0,05,

$$\frac{b}{a}=\left(\frac{R'}{R}\right)^{\frac{2}{3}},\quad a=\left[\frac{3(\lambda+2\mu)}{32\mu(\lambda+\mu)}\,PR\left(3\sqrt[3]{\frac{R}{R'}}-1\right)\right]^{\frac{1}{3}};$$

formules d'où l'on déduit que, le grand rayon de courbure, R, restant constant, la base d'appui $\pi ab$ est d'autant moindre, et les pressions qu'elle supporte par unité d'aire d'autant plus fortes, que l'autre rayon de courbure, R′, devient plus petit.

Entre autres lois intéressantes, l'abaissement $w$ éprouvé par le point du sol situé au centre de l'ellipse est la somme des deux qui s'observent, respectivement, à une extrémité du grand axe et à une du petit axe.

109. — *Sur un potentiel à quatre variables, qui rend presque intuitives l'intégration de l'équation du son et la démonstration de la formule de Poisson, concernant le potentiel inverse à trois variables.*

(Comptes-Rendus, 29 mai 1882; t. XCIV, p. 1465)

Le potentiel dont il s'agit *(potentiel sphérique)* s'obtient, pour une certaine masse répandue dans l'espace, en prenant le potentiel ordinaire, au point quelconque $(x, y, z)$, non pas de toute cette masse, mais d'une de ses couches sphériques, d'une épaisseur infiniment petite constante $dr$, découpées autour de ce point comme centre. Il dépend donc, non seulement, comme les autres potentiels, des trois coordonnées $x$, $y$, $z$ du point considéré, mais aussi du rayon $r$ de la sphère ; et *il jouit de la propriété fondamentale d'avoir son paramètre différentiel du second ordre $\Delta_2$, c'est-à-dire la somme de ses trois dérivées secondes par rapport aux coordonnées respectives du centre de la sphère, égal à sa quatrième dérivée seconde directe, prise par rapport au rayon $r$.* Cette propriété, exprimée par la formule

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2}=\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2},$$

où $\varphi$ désigne le potentiel sphérique rapporté à l'unité d'épaisseur de la couche (c'est-à-dire divisé par $dr$), constitue une relation analogue à l'équation dite *du son*. Aussi peut-on intégrer intuitivement l'équation du son, au moyen d'un potentiel sphérique ajouté à la dérivée d'un autre potentiel sphérique par rapport au rayon $r$ : ce qui donne une forme concrète, immédiatement saisissable, aux intégrales célèbres obtenues par Poisson, mais dont on ne possédait encore que des démonstrations compliquées.

Il suffit d'ailleurs d'intégrer, depuis $r =$ un infiniment petit $\varepsilon$ jusqu'à $r = \infty$, l'expression $\Delta_2 (\varphi\, dr)$, ou $\frac{d^2\varphi}{dr^2}\, dr$, pour avoir, comme valeur du paramètre $\Delta_2$ du potentiel ordinaire $\int \varphi\, dr$, l'expression $-\frac{d\varphi}{dr}$ prise à la limite $r = \varepsilon$, expression qu'un calcul immédiat donne alors et qui égale le produit de $-4\pi$ par la densité $\rho$ au point $(x, y, z)$. Ainsi se trouve démontrée fort simplement la formule de Poisson sur le potentiel ordinaire.

110. — *Les déplacements qu'entraînent de petites dilatations ou condensations quelconques, dans tout milieu homogène et isotrope indéfini, sont calculables à la manière d'une attraction newtonienne.*

(Comptes-Rendus, 19 juin 1882 ; t. XCIV, p. 1648.)

Cet article contient l'application du procédé d'intégration par des potentiels sphériques, qui vient d'être indiqué, aux équations des petits mouvements d'un milieu élastique isotrope, solide ou fluide, indéfini en tous sens, et dont les diverses molécules ont initialement subi des déplacements donnés ou reçu des vitesses connues. L'auteur y démontre, en particulier, que de petites dilatations ou raréfactions quelconques de la matière, produites en certains endroits d'un tel milieu, entraînent, vers ces endroits, des déplacements régis par la loi newtonienne, chaque *vide* élémentaire attirant, en quelque sorte, proportionnellement à sa capacité et en raison inverse du carré de la distance, les particules ambiantes, et ces *appels* partiels vers les divers vides élémentaires se composant géométriquement, à la manière ordinaire, pour donner le vrai déplacement de chaque particule consécutif aux dilatations ou aux condensations produites. Cette loi constitue une extension d'une autre, trouvée par M. Boussinesq en 1870 (p. 14 ci-dessus), au sujet des mouvemonts que prend le liquide contenu dans un vase, vers un orifice de

forme quelconque qu'on vient à y ouvrir au centre d'une paroi plane : car il avait démontré que tout se passe alors comme si chaque partie infiniment petite de l'orifice imprimait aux molécules fluides intérieures des vitesses dirigées vers cette partie et constamment proportionnelles tant à son débit actuel qu'à l'inverse du carré de sa distance actuelle aux molécules considérées, la vitesse effective de celles-ci se formant d'ailleurs par la superposition ou la composition géométrique de tous les appels partiels, ainsi obtenus, vers les diverses régions de l'orifice.

### 111. — *Définition naturelle des paramètres différentiels des fonctions et notamment de celui du second ordre* $\Delta_2$.

(Comptes-Rendus, 11 septembre 1882; t. XCV, p. 479.)

Cette note est relative aux paramètres différentiels des fonctions, d'un emploi si général en Physique mathématique. L'auteur y donne leur définition la plus naturelle, qui paraissait avoir échappé jusque alors aux géomètres, par suite peut-être de son extrême simplicité. Cette définition consiste à dire que le paramètre différentiel d'un certain ordre pair d'une fonction de point est, à un facteur numérique près, la moyenne des valeurs que prend, en un point donné, la dérivée du même ordre de la fonction, le long de toutes les droites qui s'y croisent; et, comme cette définition, si on l'étendait aux paramètres d'ordre impair, les ferait identiquement nuls, on peut prendre pour ceux-ci, sauf encore un facteur numérique, la quantité positive dont le carré égale la valeur moyenne du carré de la dérivée de l'ordre impair considéré, évaluée également, au point donné, suivant toutes les directions.

Non seulement cette définition conduit, pour les deux paramètres du premier et du second ordre, à leurs expressions reçues, mais elle montre de plus que celui du second ordre mesure l'accroissement moyen qu'éprouve la fonction autour du point considéré, quand on s'en éloigne à une distance infiniment petite; ce qui fait de ce paramètre différentiel la dérivée la plus naturelle possible d'une fonction de point et explique son rôle immense en Physique mathématique.

L'emploi d'un potentiel sphérique donne aisément une expression générale et simple des paramètres différentiels d'ordre pair, expression prouvant qu'ils résultent tous d'applications répétées de celui du second ordre.

112. — *Mémoire sur le potentiel sphérique, ou potentiel à quatre variables, et sur ses applications à la dynamique des corps élastiques.*

Ce mémoire contient le développement des idées résumées dans les trois notes précédentes. Il paraîtra à la suite de celui qui concerne l'*Application des potentiels à l'équilibre d'élasticité* (N° 40 ci-dessus) et qui, n'ayant pu, à cause de son étendue, être inséré au *Journal de Mathématiques*, s'imprime en ce moment dans le Recueil de la Société des sciences de Lille.

113. — *Intégration de certaines équations aux dérivées partielles, par le moyen d'intégrales définies contenant sous le signe $\int$ le produit de deux fonctions arbitraires.*

(Comptes-Rendus, 2 janvier 1882 ; t. XCIV, p. 33.)

114. — *Sur l'intégration de l'équation* $A\frac{d^n\varphi}{dt^n}+\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\ldots\right)^n\varphi=0.$

(Comptes-Rendus, 20 février 1882 ; t. XCIV, p. 514.)

Ces deux notes, auxquelles il faut joindre la première partie d'une troisième (n° 117 ci-après), ont fait connaître une méthode générale, uniforme et simple, pour intégrer une catégorie assez étendue d'équations aux dérivées partielles, où il ne paraît que des dérivées de deux ordres différents, doubles l'un de l'autre, les dérivées par rapport à certaines variables s'y trouvant justement deux fois plus élevées que celles qui y sont prises par rapport aux autres. Les équations de cette espèce présentent un haut intérêt ; car elles comprennent celles qui expriment le mouvement de la chaleur dans les solides, la transmission des frottements dans les fluides, à partir des parois contre lesquelles glissent leurs molécules, la propagation des ébranlements transversaux le long des barres droites et des plaques planes, les déformations et le transport apparent, à la surface d'une eau profonde, des *ondes* tant d'*émersion* que d'*impulsion*, c'est-à-dire des rides mobiles qu'y fait naître soit le brusque enlèvement d'un solide préalablement immergé, soit un coup de vent ou la chute d'un corps.

M. Boussinesq exprime les solutions de ces équations au moyen de certaines intégrales définies, qui contiennent sous le signe $\int$ le produit de deux fonctions arbitraires $f$, $\psi$, et dont il a reconnu la propriété caractéristique,

consistant en ce que ces intégrales transmettent leur propre forme à leur paramètre différentiel du second ordre $\Delta_2$, mais avec substitution, à chaque fonction arbitraire, de sa dérivée première. Dans le cas où les variables par rapport auxquelles se prennent les dérivées les plus élevées paraissant dans l'équation se réduisent à une seule, $s$, ces intégrales définies sont de la forme $\int_0^\infty f\left(\frac{s^2}{2\alpha^2}\right)\psi\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)d\alpha$ : leur dérivée première en $s$ est $\int_0^\infty f'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)\psi\left(\frac{s^2}{2\alpha^2}\right)d\alpha$, comme on le reconnaît immédiatement, et, par suite, leur dérivée seconde en $s$ est $\int_0^\infty f'\left(\frac{s^2}{2\alpha^2}\right)\psi'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)d\alpha$. Les deux fonctions arbitraires $f$, $\psi$ dépendent en outre, d'une certaine manière, des autres variables : lorsque ces autres variables se réduisent, comme les premières, à une seule, celle-ci est simplement jointe par le signe + ou le signe — à l'une des deux fractions $\frac{s^2}{2\alpha^2}$, $\frac{\alpha^2}{2}$, sous les signes $f$ ou $\psi$.

Comme il suffit de choisir convenablement l'une des deux fonctions arbitraires pour que l'intégrale, ou une somme de deux intégrales analogues, vérifie l'équation proposée, l'autre fonction arbitraire reste disponible pour satisfaire aux conditions spéciales, telles que celles d'état initial. Et les solutions formées en ajoutant plusieurs de ces intégrales admettent une variété ou même une surabondance de formes qui se prête à la vérification des relations définies les plus complexes, avec une facilité dont il n'y a peut-être pas d'autre exemple en Physique mathématique.

Un membre très distingué de l'Académie Royale de Belgique, M. de Tilly, en voyant cette facilité de calcul que présentent, malgré leurs deux fonctions arbitraires, les intégrales définies dont il s'agit, a eu l'idée de les faire servir à l'intégration de certaines équations différentielles, du genre de celle de Riccati, et il y est parvenu très rapidement par un choix convenable des fonctions arbitraires. Mais c'est surtout pour les équations aux dérivées partielles rentrant dans les types désignés que leur emploi est fécond.

115. — *Equations différentielles du mouvement des ondes produites à la surface d'un liquide par l'émersion d'un solide.*

(Comptes-Rendus, 9 janvier 1882 ; t. XCIV, p. 71.)

116. — *Sur les ondes que fait naître, dans l'eau en repos d'un canal, l'émersion d'un cylindre solide, plongé en travers dans ce canal.*

(Comptes-Rendus, 16 janvier 1882 ; t. XCIV, p. 127.)

117. — *Sur les ondes produites par l'émersion d'un solide à la surface d'une eau tranquille, quand il y a lieu de tenir compte des deux coordonnées horizontales.*

(Comptes-Rendus, 5 juin 1882; t. XCIV, p. 1505.)

Ces trois articles ont pour objet l'application de la méthode d'intégration dont il vient d'être parlé au problème des ondes liquides d'émersion et d'impulsion, l'un des plus épineux de la Physique mathématique qu'aient abordés les géomètres. Il a exercé, dans le premier quart de ce siècle, le génie mathématique de Poisson et de Cauchy, qui ont su y suppléer, par leur puissance d'intuition analytique, à la complication et, parfois, au peu de rigueur de leurs méthodes, soit qu'ils y employassent les imaginaires dans des transformations où elles paraissent ne fournir qu'une analogie ou une induction capables de guider l'esprit sans l'éclairer, soit qu'ils y eussent recours à des développements en série d'une convergence peu sûre. M. Boussinesq a retrouvé leurs formules sans recourir à aucun de ces moyens et presque sans calculs. Puis il a pu donner des énoncés relativement très simples des lois des ondes en question, lesquelles sont uniformément accélérées, en les comparant aux ondes périodiques, douées d'une propagation uniforme, dont se compose une *houle* régulière (p. 10 ci-dessus), ondes que Poisson et Cauchy ne connaissaient pas, et en regardant chaque groupe d'un certain nombre de *rides* d'émersion ou d'impulsion consécutives comme formant une houle qui se déformerait peu à peu par l'allongement et l'aplatissement graduels de ses vagues.

118. — *Résistance d'une barre prismatique et homogène, de longueur supposée infinie, au choc transversal et au choc longitudinal.*

(Comptes-Rendus, 10 avril 1882; t. XCIV, p. 1044.)

119.— *Sur le choc d'une plaque élastique plane, supposée indéfinie en longueur et en largeur, par un solide qui vient la heurter perpendiculairement en un de ses points et qui lui reste uni.*

(Comptes-Rendus, 17 juillet 1882; t. XCV, p. 123.)

L'auteur y applique sa méthode d'intégration au problème des mouvements que prennent, dans leurs diverses parties, une barre élastique droite et une

plaque élastique plane, heurtées perpendiculairement, en un de leurs points, par un solide possédant une vitesse donnée. Il démontre, par exemple, que la *dilatation dangereuse* (ou dilatation de la fibre la plus étendue), produite dans la barre dès l'instant du choc et à l'endroit heurté, vaut le rapport de la vitesse donnée du corps heurtant à celle de propagation des sons longitudinaux le long de la barre, multiplié par un nombre ne dépendant que de la forme de la section, nombre toujours supérieur à 1 et égal à 2 quand la barre est ronde, à $\sqrt{3}$ quand elle est rectangulaire et heurtée perpendiculairement à une de ses faces, etc. Dans le cas de la plaque, la différence des deux dilatations principales de la face rendue convexe, sur le contour de la petite partie heurtée et à l'instant du choc, égale de même le rapport de la vitesse donnée du corps heurtant à la vitesse de propagation des sons longitudinaux dans la plaque, multiplié par le nombre constant $\frac{2\sqrt{3}}{\pi}$.

On déduit aisément de ces deux lois que, si la vitesse du corps heurtant dépasse une certaine fraction de la vitesse de propagation des sons longitudinaux le long de la barre ou de la plaque, l'effet du choc sera de rompre nettement la partie heurtée, avant que le mouvement se soit propagé dans les autres parties; et, cela, quelque faibles que soient la masse et la consistance du corps heurtant, supposées toutefois suffisantes pour que sa vitesse s'imprime à la partie directement touchée. On en déduit aussi, entre autres résultats intéressants, que la vitesse d'un choc transversal juste capable de rompre de cette manière une barre est plus petite que celle d'un choc longitudinal, produisant le même effet par extension, dans le rapport de 1 à 2 si la barre est ronde, de 1 à $\sqrt{3}$ si elle est rectangulaire et heurtée normalement à une de ses faces, etc.

L'auteur démontre encore que, dans le cas de la plaque indéfinie, le déplacement du point heurté tend, quand il n'y a pas rupture, vers une certaine limite, et que, une fois ce point sensiblement parvenu dans sa nouvelle situation de repos, les anneaux concentriques environnants, dont se compose la plaque, viennent se ranger autour de lui, sur un même plan parallèle à leur plan primitif, au bout de temps proportionnels aux carrés de leurs rayons.

Les lois précédentes, établies pour des barres infiniment longues ou pour des plaques indéfinies en longueur et en largeur, s'étendent d'ailleurs, évidemment, aux barres et aux plaques de dimensions limitées, pourvu qu'on ne les applique qu'à la *période de début* du choc, c'est-à-dire au temps durant lequel l'ébranlement n'a pas encore atteint en quantité appréciable les extré-

mités du corps élastique et où, par suite, tout se passe comme si ces extrémités étaient à l'infini.

120. — *Méthode générale d'intégration, pour une classe importante d'équations aux dérivées partielles, et principales applications physiques de cette méthode.*

Ce travail étendu contient le développement des idées résumées dans les sept articles précédents, avec la solution d'autres questions de nature analogue, relatives à la théorie de la chaleur, au choc longitudinal d'une barre de longueur finie, libre ou fixée à un bout et heurtée à l'autre, etc. Il va paraître à la suite du mémoire intitulé « *Application des potentiels à l'équilibre et au mouvement des solides élastiques* », qui s'imprime en ce moment dans le Recueil de la Société des sciences de Lille.

121. — *Contribution à la discussion provoquée, au sein de la Société des ingénieurs civils de Londres, par les observations de M. Baker sur la pression latérale des terres.*

(*Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, vol. LXV, 1881.)

Cet article a été composé à la demande du savant secrétaire de la Société des Ingénieurs civils de Londres, M. James Forrest, qui a eu recours à l'auteur pour expliquer le fait, paradoxal en apparence, de murs en bois soutenant effectivement des sables, dans des conditions où la théorie, classique en Angleterre, de l'illustre et regretté Macquorn-Rankine indiquait que leur épaisseur était très insuffisante pour cela. M. Boussinesq y montre qu'il avait résolu implicitement cette difficulté bien avant que l'expérience l'eût mise en vue; car il résulte de son article du 4 avril 1870 (p. 43 ci-dessus) que, lorsqu'on tient compte, non seulement du frottement intérieur des terres, mais aussi de leur frottement contre le mur (ce que Rankine avait négligé de faire), l'épaisseur minimum cherchée, dans les cas, étudiés par M. Baker, de murs verticaux soutenant des terre-pleins horizontaux, reste conforme à ce qu'indiquent les observations. Cette épaisseur n'a jamais besoin de dépasser le tiers environ de la hauteur, le mur fût-il d'une matière infiniment légère, tandis que la théorie de Rankine fait croître, dans ce cas, l'épaisseur du mur jusqu'à l'infini.

122. — *Note sur la détermination de l'épaisseur minimum que doit avoir un mur vertical, d'une hauteur et d'une densité données, pour contenir un massif terreux, sans cohésion, dont la surface supérieure est horizontale.*

(Annales des Ponts et Chaussées; t. III, p. 625; 1882.)

L'auteur montre comment l'équilibre limite d'un tel massif homogène, qui échappe à nos méthodes d'intégration, se trouve compris entre ceux, facilement calculables, de deux certains massifs légèrement hétérogènes, de même forme et presque de même nature que le proposé, mais dont l'un résiste moins et, l'autre, plus que lui, à l'éboulement : ce qui donne deux limites, la première, supérieure, la deuxième, inférieure, de l'épaisseur minimum cherchée du mur. En prenant la moyenne, on obtient une valeur approchée de cette épaisseur ; elle l'est, dans les cas les plus défavorables, a moins d'un quatorzième près, c'est-à-dire bien assez pour les besoins de la pratique.

123. — *Sur les intégrales asymptotes des équations différentielles.*

(Comptes-Rendus, 30 janvier 1882 ; t. XCIV, p. 208.)

M. Boussinesq traite, dans cet article, de certaines solutions que peut admettre une équation différentielle et qui tiennent le milieu entre les intégrales ordinaires et les solutions singulières. Il les avait signalées en 1877 et 1878 (dans les mémoires n$^{os}$ 96 et 97 ci-dessus, p. 79) à l'attention des géomètres ; et l'un des plus jeunes, déjà éminent, M. Poincaré, en a, depuis, donné de nouveaux exemples. Ce sont des intégrales telles, que, à partir d'un point quelconque de leur cours, elles se trouvent aussi voisines qu'on veut d'autres intégrales, après en avoir différé notablement avant ce point : elles constituent donc, comme les solutions singulières, des lieux où se réunissent les autres intégrales ; mais leur jonction avec celles-ci ne se fait qu'asymptotiquement ou ne se complète qu'à l'infini, ce qui, au point de vue concret, signifie qu'elle s'opère trop graduellement pour qu'on puisse en fixer l'instant précis.

L'auteur montre que, généralement, ces intégrales asymptotes s'obtiennent, comme les solutions singulières, en égalant à l'infini les facteurs d'intégrabilité ; et il prouve que les équations linéaires n'admettent pas plus d'intégrales asymptotes *distinctes* que de solutions singulières.

124. — *Quelques considérations à l'appui d'un article du 29 mars 1880*[1], *sur l'impossibilité d'admettre, en général, une fonction des vitesses, dans toute question d'hydraulique où les frottements ont un rôle notable.*

(Comptes-Rendus, 20 avril 1880; t XC, p 967.)

L'auteur y démontre, par exemple, que, dans un fluide naturel sortant de l'état de repos, les trois expressions, d'abord nulles, $\alpha = \frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy}$, $\beta = \frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz}$, $\gamma = \frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}$, où $u$, $v$, $w$ désignent les composantes de la vitesse au point $(x, y, z)$, naissent par l'action des frottements d'une manière tellement graduelle, que toutes leurs dérivées successives sont continues et, par conséquent, initialement égales à zéro. Ainsi, ces quantités $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ commencent par varier avec une lenteur infiniment plus grande qu'on ne peut l'exprimer au moyen des fonctions simples de l'analyse, et, en particulier, elles échappent à tout développement, par la série de Mac-Laurin, suivant les puissances du petit temps $t$ écoulé, de même que la fonction $e^{-\frac{1}{t^2}}$, signalée à ce point de vue par Cauchy.

On conçoit donc que la démonstration de Lagrange pour prouver que les différences $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ restent nulles, démonstration reposant sur l'hypothèse de l'applicabilité de la série de Mac-Laurin, puisse être en défaut, et qu'elle le soit en effet dans le cas général des fluides à frottements.

125. — *Equations différentielles des petits mouvements d'un liquide pesant, quand ils sont principalement horizontaux, que les frottements s'y trouvent peu sensibles, et que le liquide est contenu soit dans un bassin à fond presque horizontal, soit dans un tuyau ou un canal de peu de pente longitudinale, la surface supérieure, soumise à des pressions légèrement variables, n'ayant aussi que des pentes faibles.*

Ce travail paraîtra prochainement au *Journal de mathématiques pures et appliquées*. Le but en est d'établir, de la manière à la fois la plus générale et la plus simple, les équations aux dérivées partielles qui régissent la profondeur d'eau

(1) C'est l'article analysé ci-dessus p. 25.

et la vitesse moyenne, dans cette classe importante de phénomènes ondulatoires, à mouvements presque horizontaux, dont font partie l'*onde solitaire* des canaux découverts et les *seiches* des lacs. Les équations qui les régissent s'y trouvent démontrées, non-seulement, comme dans les Mémoires des nos 6 et 7 (p. 6), pour le cas d'intumescences propagées au sein d'une eau en repos, mais pour celui où elles le sont dans un courant, à filets inégalement rapides, possédant déjà des vitesses comparables à celles que font naître les ondes. Il y est prouvé que, si l'on rapporte le fluide à des axes animés de la vitesse moyenne du courant, les intumescences se propagent relativement à ces axes, et se tranforment, comme elles le feraient dans une eau en repos, même à une deuxième approximation, où on ne néglige plus les vitesses individuelles des filets fluides devant la vitesse de propagation, ni la hauteur des ondes comparée à la profondeur totale du liquide. Ces résultats du calcul sont bien confirmés par l'observation ; car celle-ci montre que les cours d'eau torrentueux ou approchant de l'être, c'est-à-dire ceux dont la vitesse est comparable à la vitesse même avec laquelle y progressent les longues ondes, sont les seuls où ces ondes se comportent autrement que dans les canaux à eau stagnante, pour obéir aux lois, également démontrables par la théorie, dont il a été question plus haut (p. 21).

126. — *Notes et recherches pour l'édition française des leçons sur l'élasticité de Clebsch, publiée par MM. de Saint-Venant et Flamant.*

(Théorie de l'élasticité des corps solides, de Clebsch, édition française, par MM. de Saint-Venant et Flamant, avec des Notes étendues de M. de Saint-Venant, imprimée chez M. Dunod, en deux fascicules : l'un a paru en 1881 et les feuilles de l'autre sont presque entièrement tirées.).

Il s'agit de deux notes et de diverses études faites à la demande de M. de Saint-Venant. Les deux notes contiennent une exposition résumée des *Applications des potentiels à l'équilibre des corps élastiques*, dont il a été question plus haut (p. 37 à 41 et 86 à 87). Les études, dont M. de Saint-Venant a utilisé les résultats dans la rédaction de ses propres notes, concernent :

1° Les déformations exactement calculables que comportent des plaques épaisses, fléchies pareillement tout autour d'un axe ou symétriquement par rapport à des plans parallèles ;

2° Le partage du mouvement et de la force vive qui se fait, dans les corps libres ou pivotants que d'autres viennent heurter, entre les translations ou

rotations d'ensemble ultérieures et les vibrations, de diverses périodes, produites par le choc;

3° L'intégration en série de l'équation différentielle du quatrième ordre qui se présente dans le problème des vibrations transversales d'une barre droite non-prismatique, de largeur constante, mais d'une épaisseur variable suivant la forme parabolique d'égale résistance qu'on donne au balancier des machines à vapeur;

4° Le mouvement et les conditions de résistance d'une barre prismatique de longueur finie, libre ou fixée à un bout, et heurtée à l'autre, dans le sens de sa longueur, par un corps massif. Ce problème, bien que régi par l'équation aux dérivées partielles des cordes vibrantes et résoluble, par conséquent, sous forme finie, au moyen des intégrales de d'Alembert, présentait une certaine difficulté dans la détermination des fonctions arbitraires, qui y dépend d'une équation aux différences mêlées. Aussi, Navier avait-il préféré ne pas s'y servir des intégrales de d'Alembert, et s'était-il contenté d'une solution en série dont un calcul suffisamment exact est à peu près irréalisable. Au contraire, la solution sous forme finie permet de se rendre compte de toutes les circonstances du choc. Voici, par exemple, (ce qui importe le plus dans la pratique) l'expression de la déformation maxima ou dangereuse $\delta$. V désignant la vitesse donnée du corps heurtant, Q le poids de ce corps, P celui de la barre et $\omega$ la vitesse de propagation du son le long de cette barre, on a :

1° Pour le cas de la barre libre;

$$\delta = \frac{V}{\omega};$$

2° Pour le cas de la barre dont le bout non heurté est fixe,

$$\delta = \begin{cases} 2\,\dfrac{V}{\omega}\left[1 + e^{-2\frac{P}{Q}}\right] \quad \left(\text{si } \dfrac{Q}{P} \text{ est } < 5{,}686\right), \\[2ex] 2\,\dfrac{V}{\omega}\left[1 + \left(1 - 4\dfrac{P}{Q}\right)e^{-2\frac{P}{Q}} + e^{-4\frac{P}{Q}}\right] \quad \left(\text{si } \dfrac{Q}{P} \text{ est } > 5{,}686 \text{ et } < 13{,}82\right), \\[2ex] 2\,\dfrac{V}{\omega}\left[1 + \left(1 - 8\dfrac{P}{Q} + 8\dfrac{P^2}{Q^2}\right)e^{-2\frac{P}{Q}} + \left(1 - 8\dfrac{P}{Q}\right)e^{-4\frac{P}{Q}} + e^{-6\frac{P}{Q}}\right] \\ \qquad \left(\text{si } \dfrac{Q}{P} \text{ est } > 13{,}82 \text{ et } < 25{,}16\right), \text{ etc.}, \\[2ex] \text{enfin, } \dfrac{V}{\omega}\sqrt{\dfrac{Q}{P}} \quad \left(\text{si } \dfrac{Q}{P} \text{ est très grand}\right). \end{cases}$$

Et, dans le même second cas, $\tau$ désignant le temps employé par le son à parcourir la barre d'un bout à l'autre, le choc se termine (ou le corps heurtant se sépare de la barre) au bout d'un temps compris entre $2\tau$ et $4\tau$, quand le rapport $\frac{Q}{P}$ n'atteint pas 1,73; entre $4\tau$ et $6\tau$, quand ce rapport dépasse 1,73 et est moindre que 4,15; entre $6\tau$ et $8\tau$, quand il tombe entre 4,15 et 7,35; etc.

127. — *Leçons d'analyse infinitésimale professées à l'Institut industriel du Nord.*

(Un volume in-4° de 560 pages, autographié chez M. L. Danel, imprimeur à Lille.)

Ce cours élémentaire, à l'usage des élèves de l'Institut industriel de Lille, se distingue de la plupart des traités de calcul différentiel et intégral par son but, qui est l'application de l'analyse mathématique aux choses concrètes, et par la prédominance des considérations intuitives sur les calculs. L'auteur s'est efforcé d'y mettre à la portée de tous les esprits, sans rien sacrifier de la rigueur, toutes les parties usuelles de l'analyse, y compris les intégrales définies, les équations différentielles et aux dérivées partielles, le calcul des variations, théories indispensables dans les applications physiques et même industrielles.

Lille, 28 janvier 1883.

---

Lille Imp. L. Danel.